ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
PODGORICA

Miloš Daković

Matematičke metode u računarstvu

– skripta –

Podgorica, 25. oktobar 2021.

Sadržaj

Spisak urađenih primjera

1 Prirodni brojevi i matematička indukcija

1.1 Skup prirodnih brojeva

Pojmu prirodnog broja možemo pristupiti na dva načina: intuitivno i aksiomatski. Intuitivno shvatanje pojma prirodnog broja prisutno je u matematici odavno, dok je strogi i precizni aksiomatski pristup prirodnim brojevima u matematici prisutan od druge polovine XIX vijeka.

1.1.1 Intuitivni pristup prirodnim brojevima

Ukoliko se pozovemo na intuiciju, pod prirodnim brojem možemo podrazumijevati način određivanja broja objekata u grupi, tako da precizno možemo reći da li se dvije grupe objekata sastoje od istog broja objekata, odnosno da li u prvoj grupi ima više (ili manje) objekata nego u drugoj. Pojam prirodnog broja stariji je od pisma i jezika jer je već praistorijskim ljudima od vitalne važnosti bilo procijeniti da li se njihova grupa sastoji od 3, 4 ili 5 jedinki kada se odlučuje da li da krenu u lov na neku životinju. U ovom stadijumu ljudi su razvili osjećaj za manje brojeve (po tvrdnjama nekih psihologa broj 6 je najveći prirodan broj koji ljudsko biće može lako da prepozna bez ikakvog obrazovanja.

Veliki korak naprijed u razumijevanju pojma broja predstavlja pronalaženje načina za zapisivanje brojeva. Prirodne brojeve možemo bilježiti na razne načine:

- Ukoliko prirodan broj shvatimo kao broj objekata u kolekciji, svaki objekat možemo predstaviti tačkom i na taj način činjenicu da kolekcija ima sedam objekata zapisati kao: $\cdots\cdots\cdot$. Ovaj način je očigledno nepovoljan kada se radi o većim brojevima, ali nam nudi jednu suštinsku prednost u odnosu na ostale zapise: možemo na jednostavan način da upoređujemo dva broja i da zaključimo da li su jednaki ili je jedan od njih veći od drugoga.

- Rimski brojni sistem korišćen je za zapis brojeva u antičko doba

- Dekadni (arapski) brojni sistem danas je široko rasprostranjen a potiče iz IX vijeka. Radi se o pozicionom brojnom sistemu sa deset cifara koje imaju različitu vrijednost u zavisnosti od mjesta na kojem se nalaze (jedinice, desetice, stotine...)

- Binarni brojni sistem je takođe pozicioni brojni sistem sa osnovom dva. Osnovna prednost ovog brojnog sistema je u tome što je veoma lako hardverski realizovati elektronske komponente koje omogućavaju skladištenje i osnovne računske operacije nad brojevima u binarnom brojnom sistemu.

Prirodni brojevi, pored toga što se mogu tumačiti kao količina objekata u nekoj kolekciji, mogu se tumačiti i kao redni broj objekta u nekom uređenom nizu objekata (na primjer prvi, drugi i treći trkač koji je prošao kroz cilj). Ovakvi brojevi nazivaju se redni brojevi ili ordinali.

S obzirom na dva osnovna intuitivna tumačenja prirodnog broja (količina i redni broj) razumljivo je da broj nula u oba slučaja nema fizičko tumačenje. To je i razlog što se nula kao broj relativno kasno pominje (uočite da se nula ne može napisati u rimskom zapisu). Skup prirodnih brojeva je dakle, prema intuitivnim definicijama i arapskom zapisu brojeva skup

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Ovaj skup se najčešće obilježava sa $\mathbb{N}$. U matematičkoj logici i računarskim naukama često se pod skupom prirodnih brojeva podrazumijeva skup koji sadrži i nulu. Taj skup obilježavaćemo simbolom $\mathbb{N}_0$. U nastavku ćemo pod skupom prirodnih brojeva podrazumijevati skup $\mathbb{N}_0$.

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

U računarskim sistemima se prirodnim brojevima pristupa na drugačiji način. Naime usled konačnog broja bitova u registrima (i memoriji) računarskog sistema ne postoji mogućnost zapisa proizvoljnog prirodnog broja (ima ih beskonačno mnogo, pa bi i memorijski zahtjevi bili beskonačno veliki). Iz tog razloga se u računarskim sistemima koristi konačan opseg prirodnih brojeva. Na primjer ako je dužina registra 32 bita tada se u tom registru mogu zapisati brojevi od 0 do $2^{32} - 1 = 4\ 294\ 967\ 295$.

1.1.2 Aksiomatska definicija prirodnih brojeva

U drugoj polovini XIX vijeka italijanski matematičar Peano definisao je postulate koje svaka formalna definicija pojma prirodnog broja mora ispunjavati. Postulati su zasnovani na prirodnom broju nula (0) i funkciji „sljedbenik” koja kao argument uzima prirodan broj i kao rezultat vraća takođe prirodan broj. Peanovi postulati mogu se formulisati na sledeći način:

1. Nula je prirodan broj.

2. Svaki prirodni broj ima svog sljedbenika. Ako je a prirodan broj sljedbenika broja a obilježavaćemo sa $S(a)$.

3. Ne postoji prirodan broj kome je nula sljedbenik.

4. Ako je $\mathbb{K}$ skup takav da nula pripada skupu $\mathbb{K}$ i za svaki elemenat a iz skupa $\mathbb{K}$ vrijedi da sljedbenik elementa a takođe pripada skupu $\mathbb{K}$, tada skup $\mathbb{K}$ sadrži sve prirodne brojeve.

Četvrti Peanov aksiom naziva se aksiom matematičke indukcije.

Na skupu prirodnih brojeva definišu se relacije i operacije. Osnovna relacija je relacija jednakosti (ako su dva prirodna broja a i b u relaciji jednakosti tada pišemo $a = b$) koja zadovoljava sledeće osobine:

1. Za svaki prirodan broj a vrijedi $a = a$.
2. Za svaka dva prirodna broja a i b ukoliko je $a = b$ tada je i $b = a$.
3. Ako su a, b i c prirodni brojevi i ako je $a = b$ i $b = c$, tada je i $a = c$.
4. Za svaka dva prirodna broja a i b ukoliko je $S(a) = S(b)$ tada je i $a = b$.

Operacija sabiranja (u oznaci $+$) zadovoljava sledeće osobine:

1. $a + 0 = a$
2. $a + S(b) = S(a + b)$

Operacija množenja (u oznaci $*$) zadovoljava osobine:

1. $a * 0 = 0$
2. $a * S(b) = a * b + a$

Uobičajeno je da se $S(0)$ obilježi sa 1, $S(1)$ sa 2, $S(2)$ sa 3... Takođe je jasno da vrijedi $S(a) = a + 1$. Dokaz ove tvrdnje izvodimo na osnovu osobine operacije $+$: $a + S(b) = S(a + b)$ stavljajući $b = 0$. Dobijamo:

$$a + S(0) = S(a + 0)$$

$S(0)$ smo obilježili sa 1, a vrijedi da je $a + 0 = a$ pa konačno dobijamo

$$a + 1 = S(a)$$

i korišćenjem osobine 2. relacije jednakosti konačno

$$S(a) = a + 1$$

što je i trebalo dokazati.

1.2 Matematička indukcija

Matematička indukcija je metod matematičkog dokazivanja najčešće korišćen za dokazivanje da je neka tvrdnja tačna za sve prirodne brojeve. Obilježimo sa $P(n)$ tvrdnju koja zavisi od prirodnog broja n. Uočite da je ovakvom definicijom dato beskonačno mnogo tvrdnji:

$$P(0), P(1), P(2), \ldots$$

Postavlja se pitanje da li su sve one tačne? Dokaz ispravnosti tvrdnje P u svim slučajevima može se provesti metodom matematičke indukcije. On se sastoji u dva koraka:

1. **Baza:** Utvrđuje se tačnost tvrdnje $P(0)$.
2. **Induktivni korak:** Pretpostavimo da za neki prirodan broj n vrijedi tvrđenje $P(n)$. Dokažimo da u tom slučaju vrijedi i tvrđenje $P(S(n))$ odnosno $P(n+1)$.

Ukoliko je baza tačna i ukoliko dokažemo induktivni korak tada zaključujemo da je tvrdnja $P(n)$ tačna za sve prirodne brojeve n.

Dosta često tvrdnja $P(n)$ ima smisla samo za pozitivne prirodne brojeve, odnosno dokazuje se na skupu $\mathbb{N}$ koji ne sadrži nulu. U tom slučaju koraci provođenja dokaza su:

1. **Baza:** Utvrđuje se tačnost tvrdnje $P(1)$.
2. **Induktivni korak:** Pretpostavimo da za neki prirodan broj n veći od nule vrijedi tvrđenje $P(n)$. Dokažimo da u tom slučaju vrijedi i tvrđenje $P(n+1)$.

Opštiji slučaj je kada je potrebno dokazati da tvrdnja $P(n)$ vrijedi za sve prirodne brojeve veće ili jednake od n_0. Tada su koraci matematičke indukcije:

1. **Baza:** Utvrđuje se tačnost tvrdnje $P(n_0)$.
2. **Induktivni korak:** Pretpostavimo da za neki prirodan broj n veći ili jednak od n_0 vrijedi tvrđenje $P(n)$. Dokažimo da u tom slučaju vrijedi i tvrđenje $P(n+1)$.

Konačno, pri dokazivanju tvrdnje $P(n+1)$ možemo pretpostaviti da je tvrdnja $P(m)$ tačna za svako $m \leq n$. Ovaj tip indukcije se naziva *transfinitna indukcija*. U ovom slučaju su koraci u dokazivanju:

1. **Baza:** Utvrđuje se tačnost tvrdnje $P(n_0)$.

2. **Induktivni korak:** Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za $m = n_0$, $m = n_0 + 1, \ldots, m = n$ Dokažimo da u tom slučaju vrijedi i tvrđenje $P(n+1)$.

Primjer 1.1:

Pokažimo da vrijedi tvrdnja:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

za svaki prirodan broj n veći od nule.

Rješenje:

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Dobijamo:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

što je očigledno tačno.

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da je naša tvrdnja tačna za neki prirodan broj n ($n \geq 1$), odnosno

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

Pokažimo da u tom slučaju tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$. Dakle treba da dokažemo da vrijedi

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Pođimo od lijeve strane prethodnog izraza $1 + 2 + \cdots + n + (n+1)$. Koristeći se indukcionom pretpostavkom (2) imamo da je:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Dakle, tvrdnja (1) je tačna za svako $n \geq 1$.

Primjer 1.2:

Pokažimo da je $n(n+1)(n+2)$ gdje je n prirodan broj uvijek djeljivo sa 6.

Rješenje:

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $n = 0$. Dobijamo:

$$n(n+1)(n+2) = 0 \cdot (0+1) \cdot (0+2) = 0$$

a kako je broj 0 djeljiv sa 6 to je baza indukcije tačna.

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da je naša tvrdnja tačna za neki prirodan broj $m = n$, odnosno da je broj $m(m+1)(m+2)$ djeljiv sa 6. Dokažimo da je tada tvrdnja tačna i za $n = m+1$ odnosno da vrijedi da je

$$(m+1)(m+2)(m+3)$$

djeljivo sa 6.

Napišimo prethodni izraz u obliku

$$(m+1)(m+2)(m+3) = m(m+1)(m+2) + 3(m+1)(m+2) \tag{3}$$

Prvi sabirak na desnoj strani prethodne jednačine je djeljiv sa 6 prema indukcijskoj pretpostavci.

Posmatrajmo drugi sabirak $3(m+1)(m+2)$. On je očigledno djeljiv sa 3. Ukoliko je $(m+1)(m+2)$ uvijek djeljivo sa 2 tada je proizvod $3(m+1)(m+2)$ djeljiv sa 6.

Posmatrajmo dva slučaja: ako je broj $m+1$ paran tada je $(m+1)(m+2)$ takođe paran broj pa je djeljiv sa 2; ako je broj $m+1$ neparan, tada je broj $m+2$ paran pa je ponovo $(m+1)(m+2)$ djeljivo sa 2. Dakle, broj $3(m+1)(m+2)$ je uvijek djeljiv sa 6.

Sada na desnoj strani relacije (3) imamo zbir dva broja od kojih je prvi djeljiv sa 6 po pretpostavci, a za drugi smo dokazali da je djeljiv sa 6. Stoga je i njihov zbir djeljiv sa 6, a to je trebalo i dokazati.

Dakle, tvrdnja da je za svaki prirodan broj $n(n+1)(n+2)$ djeljivo sa 6 je tačna.

Primjer 1.3:

Pokažimo da su svi konji iste boje.

Rješenje:

Da bismo dokazali ovu tvrdnju posmatrajmo skupove od po n $(n \geq 1)$ konja.

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Ako u skupu imamo samo jednog konja tada on ima jednu boju pa je baza indukcije tačna.

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da je naša tvrdnja tačna za proizvoljni skup od m $(m \geq 1)$ konja. Posmatrajmo sada skup od $m+1$ konja. Numerišimo konje brojevima $1, 2, \ldots, m, m+1$. Formirajmo sada dva skupa

$$S_1 = \{1, 2, \ldots m\}$$
$$S_2 = \{2, 3, \ldots m+1\}$$

oba skupa imaju po m konja te po indukcijskoj pretpostavci svi konji u skupu S_1 su iste boje, a takođe su svi konji u skupu S_2 iste boje.

Kako se skupovi S_1 i S_2 preklapaju (konji $2, 3, \ldots m$ pripadaju i skupu S_1 i skupu S_2) zaključujemo da su svih $m+1$ konja iste boje, što je i trebalo dokazati.

S obzirom da prethodno „dokazana“ tvrdnja *sigurno* nije tačna pronađite grešku u rasuđivanju.

Primjer 1.4:

Pokažimo da se kroz n tačaka u ravni $(n \geq 2)$ među kojima ne postoje tri tačke koje leže na istoj pravoj može provući

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

različitih pravih. Podrazumijeva se da je prava linija definisana dvjema različitim tačkama.

Rješenje:

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $n = 2$. Ako imamo dvije tačke kroz njih možemo provući samo jednu pravu liniju. Naša formula tvrdi da je broj pravih linija

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2\cdot(2-1)}{1} = 1$$

što je tačno.

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da naša formula vrijedi u slučaju m tačaka ($m \geq 2$). Dokažimo da će ona vrijediti i kada imamo $m+1$ tačku, osnosno da se kroz $m+1$ tačku može provući

$$\frac{(m+1)(m+1-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

pravih linija.

Po pretpostavci kroz m tačaka mogu se provući

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

pravih linija. Dodavanjem još jedne ($m+1$) tačke broj linija će se uvećati jer ćemo dobiti linije od tačke 1 do tačke $m+1$, od tačke 2 do tačke $m+1$, … od tačke m do tačke $m+1$. Dakle dodavanjem jedne tačke dobijamo m pravih tako da je ukupan broj pravih linija jednak

$$\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m(m-1)+2m}{2} = \frac{m(m-1+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

što je i trebalo dokazati.

Dokazali smo indukcijski korak i provjerili ispravnost baze pa zaključujemo da navedena formula vrijedi za svako n ($n \geq 2$).

Primjer 1.5:

Pokažimo da u skupu prirodnih brojeva za svaki prirodni broj x vrijedi

$$0 + x = x$$

Navedena tvrdnja slična je prvoj osobini operacije sabiranja ($a + 0 = a$) s tim što među aksiomama ne postoji tvrdnja po kojoj je sabiranje komutativna operacija, tako da ova osobina zahtijeva poseban dokaz. Navedena tvrdnja je tvdrnja nad skupom prirodnih brojeva pa se matematička indukcija (4. Peanov postulat) nameće kao metod dokazivanja.

Rješenje:

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $x = 0$. Trebamo provjeriti da li je tačno:

$$0 + 0 = 0$$

Pođimo od osobine 1. operacije sabiranja (za svaki prirodan broj a vrijedi $a + 0 = a$). Stavljajući $a = 0$, a nula je prirodan broj prema prvom Peanovom postulatu, dobijamo da je izraz

$$0 + 0 = 0$$

tačan, što je i trebalo dokazati.

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da naša formula vrijedi u slučaju $x = m$ gdje je m neki prirodan broj.

$$0 + m = m$$

Dokažimo da će ona vrijediti i kada je $x = S(m)$, odnosno da vrijedi

$$0 + S(m) = S(m)$$

Pođimo od lijeve strane. Iskoristimo osobinu 2. operacije sabiranja (za svaka dva broja a i b vrijedi $a + S(b) = S(a + b)$) i stavimo $a = 0$ i $b = m$ (nula je prirodan broj prema prvom Peanovom postulatu a m je prirodan broj prema našoj pretpostavci). Dobijamo da je

$$0 + S(m) = S(0 + m)$$

dalje je prema indukcijskoj pretpostavci

$$0 + m = m$$

pa je konačno

$$0 + S(m) = S(m)$$

što je i trebalo dokazati.

Dakle tvrdnja $0 + x = x$ je tačna za svaki prirodan broj x.

Primjer 1.6:

Dokazati da je sabiranje u skupu prirodnih brojeva komutativna operacija, odnosno da za proizvoljne prirodne brojeve x i y vrijedi

$$x + y = y + x$$

Rješenje:

U navedenoj tvrdnji figurišu dva proizvoljna prirodna broja x i y. Postupak dokazivanja izvešćemo matematičkom indukcijom po jednoj varijabli i neka to bude varijabla x.

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $x = 0$. Trebamo dokazati da vrijedi

$$0 + y = y + 0$$

gdje je y proizvoljan prirodni broj. Korišćenjem 1. osobine operacije sabiranja imamo da je desna strana $y + 0 = y$ a lijeva strana je (na osnovu tvrdnje dokazane u prethodnom primjeru) $0 + y = y$. Sada se baza indukcije svodi na

$$y = y$$

što je tačno prema 1. osobini relacije jednakosti. Time je baza indukcije dokazana. Napomenimo da potpuni dokaz baze indukcije u ovom primjeru uključuje dokaz naveden u prethodnom primjeru (Primjer 1.5 na strani 12).

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da naša formula vrijedi u slučaju $x = m$ gdje je m neki prirodan broj.

$$m + y = y + m$$

dokažimo sada da je tvrdnja tačna i kada je $x = S(m)$, odnosno

$$S(m) + y = y + S(m) \tag{4}$$

Pođimo od desne strane. Korišćenjem 2. osobine operacije sabiranja dobijamo

$$y + S(m) = S(y + m) \tag{5}$$

a korišćenjem indukcijske pretpostavke

$$S(y + m) = S(m + y) \tag{6}$$

Ponovnim korišćenjem osobine 2. operacije sabiranja dobijamo

$$S(m + y) = m + S(y) \tag{7}$$

Povezivanjem relacija (4), (5), (6) i (7) (uz korišćenje osobine 3. relacije jednakosti) dolazimo do relacije

$$S(m) + y = m + S(y) \tag{8}$$

Ukoliko je relacija (8) tačna naš dokaz je završen, ali tačnost relacije (8) nije očigledna i zahtijeva poseban postupak dokazivanja. Ponovo ćemo koristiti matematičku indukciju kao alat za provjeru tačnosti relacije (8).

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $y = 0$. Trebamo dokazati da je

$$S(m) + 0 = m + S(0)$$

Izraz na lijevoj strani se može primjenom 1. osobine operacije sabiranja svesti na $S(m)+0 = S(m)$, dok se izraz na desnoj strani, primjenom 2. (a zatim ponovo 1.) osobine operacije sabiranja svodi na $m+S(0) = S(m+0) = S(m)$. Dakle i lijeva i desna strana su jednake $S(m)$ što znači da je baza indukcije tačna.

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da naša formula vrijedi u slučaju $y = n$ gdje je n neki prirodan broj.

$$S(m) + n = m + S(n)$$

Dokažimo da je tada formula (8) tačna i u slučaju $y = S(n)$, osnosno

$$S(m) + S(n) = m + S(S(n))$$

Pođimo od lijeve strane prethodne jednakosti. Iskoristimo 2. osobinu operacije sabiranja, zatim indkucijsku pretpostavku i na kraju ponovo 2. osobinu operacije sabiranja. Dobijamo:

$$S(m) + S(n) = S(S(m) + n) = S(m + S(n)) = m + S(S(n))$$

čime je indukcijski korak dokazan, pa je formula (8) tačna.

Sada možemo zaključiti da je i polazna tvrdnja o komutativnosti sabiranja u skupu prirodnih brojeva tačna.

1.3 Zadaci

1. Koristeći se Peanovim postulatima, osobinama relacije jednakosti i osobinama operacija sabiranja i množenja dokažite da za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

   (a) $S(a) + S(b) = S(S(a+b))$

   (b) $a * 1 = a$

   (c) $0 * a = 0$

   (d) $S(a) * b = a * b + b$

2. Matematičkom indukcijom pokažite da je zbir prvih n neparnih brojeva jednak n^2.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

3. Izraz $n(n+1)(2n+1)$ je djeljiv sa 6 u slučajevima $n = 0, 1, 2$ i 3. Pokažite da je navedeni izraz djeljiv sa 6 za bilo koje n iz skupa prirodnih brojeva.

4. Provjerite da li je $n^3 + 2n$ djeljivo sa 3 za svaki prirodan broj n.

5. Koristeći se matematičkom indukcijom pokažite da za svaki prirodan broj n $(n \geq 1)$ vrijedi

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

6. Da li je izraz $8^n - 3^n$ djeljiv sa 5 za svaki prirodan broj n?

7. Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 1$ vrijedi:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

8. Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

9. Koristeći se matematičkom indukcijim dokazati da je $4^n - 1$ djeljivo sa 3 za svaki prirodan broj $n \geq 1$.

10. Dokazati da je $2^n > n^2$ za svaki prirodan broj $n \geq 5$.

2 Rekurzije

Metod rješavanja mnogih praktičnih problema je svođenje problema na jednostavniji slučaj. Dalje se i taj jednostavniji slučaj na sličan način dodatno može pojednostaviti sve dok ne dođemo do elementarnih problema čije je rješenje očigledno. Ovakav pristup rješavanju problema naziva se „rekurzija” a problemi na koje je ovaj pristup primjenljiv označavaju se kao rekurzivni (ili rjeđe rekurentni) problemi.

Veliki broj programerskih zadataka predstavljaju rekurzivne probleme. Jedan od primjera je sortiranje niza zapisa, kao elementarni programski problem kojem se može pristupiti na sledeći način:

Posmatrajmo niz od n zapisa i neka su zapisi $1,2,\ldots,n-1$ sortirani u rastujući niz. Dodavanjem n-tog zapisa trebamo dobiti sortiran niz od n zapisa, tako što ćemo pronaći odgovarajuće mjesto na koje treba umetnuti n-ti zapis. Problem sortiranja je sada sveden na problem pronalaženja mjesta novog zapisa u već sortiranom nizu, što je relativno jednostavan zadatak (koristimo na primjer binarno pretraživanje). Problem sortiranja niza od n zapisa sveli smo na jednostavniji problem: sortiranje niza od $n-1$ zapisa. Istu proceduru primjenjujemo i na taj niz „rekurzivno” i na kraju ćemo doći do niza zapisa dužine 1. Kod takvog niza sortiranje je trivijalno, tako da smo došli do rješenja problema sortiranja velikog niza zapisa.

Matematički jednostavniji primjer rekurzije je definicija faktorijela. Faktorijel prirodnog broja n, u oznaci $n!$, može se definisati kao

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

Alternativni način definisanja faktorijela je:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= (n-1)! \cdot n \end{aligned}$$

gdje prvom relacijom definišemo najjednostavniji (trivijalni) slučaj a drugom relacijom definišemo način svođenja problema reda n na jednostavniji problem za jedan manjeg reda. Na taj način, ma koliko n bilo veliko nakon konačno mnogo koraka doći ćemo do trivijalnog slučaja i izračunati $n!$.

Naredni primjer rekurzivne definicije problema možemo naći u polinomima. Polinom n-tog reda može se definisati kao

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

gdje su a_i, $i = 0,1,\ldots n$ koeficijenti iz nekog skupa koeficijenata S (najčešće cijeli, racionalni, realni ili kompleksni brojevi). Rekurzivni način definicije polinoma bi bio

$$P_0(x) = a_0$$
$$P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot x + a_n$$

gdje konstante a_i pripadaju skupu koeficijenata S. Dakle trivijalni slučaj (polinom nultog reda) definisan je direktno, dok je polinom reda n definisan rekurzivno preko polinoma reda $n-1$.

Analizirajmo problem izračunavanja vrijednosti polinoma primjenom nerekurzivne i rekurzivne definicije. Posmatrajmo polinom trećeg reda

$$P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x - 7$$

i izračunavanje njegove vrijednosti za $x = 2$.

Posmatrani polinom možemo rekurzivno zapisati kao

$$\begin{aligned} P(x) &= (3x^2 - 5x + 4) \cdot x - 7 = \\ &= ((3x - 5) \cdot x + 4) \cdot x - 7 = \\ &= (((3) \cdot x - 5) \cdot x + 4) \cdot x - 7 \end{aligned} \tag{9}$$

Sada je

$$\begin{aligned} P(2) &= 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 7 = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 7 = 5 \end{aligned}$$

prema nerekurzivnom zapisu polinoma, odnosno prema (9):

$$P(2) = (((3 \cdot 2 - 5) \cdot 2 + 4) \cdot 2 - 7 = 5$$

Potpuno očekivano, dobili smo istu vrijednost u oba slučaja, s tim što smo u prvom slučaju izvršili 6 operacija množenja i 3 operacije sabiranja, dok su u drugom slučaju obavljena 3 množenja i 3 sabiranja. Rekurzivna definicija polinoma dovela nas je do računski jednostavnijeg metoda za izračunavanje vrijednosti polinoma.

Možemo zaključiti da su u opštem slučaju rekurzivni problemi definisani u dva oblika: prvi, jednostavni oblik, koji predstavlja trivijalni slučaj (obično je zadat definicijom) i drugi oblik gdje je problem definisan pomoću sličnog (ali jednostavnijeg) problema.

Naredni primjer rekurzivne definicije je rekurzivna definicija Fibonačijevog niza brojeva F_n

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \text{za } n \geq 2$$

Prve i druga relacija predstavljaju proste definicije Fibonačijevih brojeva u najjednostavnijim slučajevima $n = 0$ i $n = 1$, dok treća relacija problem određivanja n-tog Fibonačijevog broja svodi na rješavanje jednostavnijih problema određivanja $n-1$. i $n-2$. Fibonačijevog broja.

Odredimo F_5 rekurzivnim postupkom:

$$\begin{aligned}
F_5 &= F_3 + F_4 = \\
&= (F_1 + F_2) + (F_2 + F_3) = \\
&= (F_1 + (F_0 + F_1)) + ((F_0 + F_1) + (F_1 + F_2)) = \\
&= (F_1 + (F_0 + F_1)) + ((F_0 + F_1) + (F_1 + (F_0 + F_1))) = \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8
\end{aligned}$$

Uočite da smo rekurziju primijenili dva puta u drugom redu, tri puta u trećem redu i jedan put u četvrtom redu, što daje ukupno 6 primjena rekurzivne relacije, i na kraju imamo 7 operacija sabiranja.

Određivanju broja F_5 mogli smo pristupiti i iterativno:

$$\begin{aligned}
F_2 &= F_0 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\
F_3 &= F_1 + F_2 = 1 + 2 = 3 \\
F_4 &= F_2 + F_3 = 2 + 3 = 5 \\
F_5 &= F_3 + F_4 = 3 + 5 = 8
\end{aligned}$$

uočite da smo na ovaj način rekurzivnu relaciju primijenili 4 puta i obavili 4 sabiranja.

Još jedan primjer rekurzije je problem „kule Hanoja”. Osnova problema su tri štapa. Na jednom štapu je naslagano n diskova različitih prečnika poređanih po veličini tako da se najveći disk nalazi na dnu a najmanji na vrhu. Zadatak je premjestiti diskove sa prvog na treći štap poštujući sledeća pravila:

- U jednom potezu dozvoljeno je premjestiti samo jedan disk.
- Nije dozvoljeno staviti veći disk preko manjeg.

Potrebno je odrediti koji je minimalni broj poteza potreban za izvršavanje zadatka.

Postavka problema ne uključuje rekurziju. Posmatrajmo rekurzivni pristup rješavanju problema. Označimo sa T_n broj poteza potreban da se riješi zadatak sa n diskova i posmatrajmo jednostavne slučajeve:

- Za $n = 1$ radi se o jednom disku i premještanje se može obaviti u jednom potezu, pa je $T_1 = 1$.

- Za $n = 2$ gornji disk ćemo premjestiti na srednji štap, donji disk na treći štap i u poslednjem potezu disk sa srednjeg štapa premjestiti na treći štap, tako da je $T_2 = 3$.
- Ako posmatramo n diskova, problem možemo riješiti tako što prvo premjestimo $n-1$ diskova na srednji štap u T_{n-1} poteza, zatim najveći disk premjestimo na treći štap i na kraju $n-1$ diskova sa srednjeg štapa premjestimo na treći štap u T_{n-1} poteza. Ukupan broj poteza je $T_n = 2T_{n-1} + 1$.

Sada imamo rješenje problema u rekurzivnom obliku:

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

Posmatrajmo elemente niza T_n:

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_2 &= 2T_1 + 1 = 3 \\ T_3 &= 2T_2 + 1 = 7 \\ T_4 &= 2T_3 + 1 = 15 \\ T_5 &= 2T_4 + 1 = 31 \end{aligned}$$

možemo uočiti pravilo

$$T_n = 2^n - 1$$

koje vrijedi u analiziranim slučajevima i matematičkom indukcijom pokazati da navedeno pravilo vrijedi za bilo koje n.

Primjer 2.1:

Data je rekurzivna relacija:

$$\begin{aligned} S(0) &= 1 \\ S(1) &= 2 \\ S(n) &= 2S(n-1)S(n-2) + n \end{aligned}$$

(a) Pronaći $S(5)$ iterativnim postupkom

(b) Pronaći $S(5)$ rekurzivnim postupkom

Rješenje:

(a) Vrijednosti $S(0)$ i $S(1)$ su date u definiciji rekurzivne relacije. Odredimo vrijednost $S(2)$ koristeći se rekurzivnom relacijom:

$$S(2) = 2S(1)S(0) + 2 = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 = 6$$

Na sličan način računamo i:

$$\begin{aligned}
S(3) &= 2S(2)S(1) + 3 = 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 = 27 \\
S(4) &= 2S(3)S(2) + 4 = 2 \cdot 27 \cdot 6 + 4 = 328 \\
S(5) &= 2S(4)S(3) + 5 = 2 \cdot 328 \cdot 27 + 5 = 17717
\end{aligned}$$

(b) U ovom slučaju polazimo od S_5 i računamo:

$$\begin{aligned}
S_5 &= 2S_4S_3 + 5 \\
&= 2(2S_3S_2 + 4) \cdot (2S_2S_1 + 3) + 5 \\
&= 2(2(2S_2S_1 + 3)(2S_1S_0 + 2) + 4) \cdot (2(2S_1S_0 + 2)S_1 + 3) + 5 \\
&= 2(2(2(2S_1S_0 + 2)S_1 + 3)(2S_1S_0 + 2) + 4) \cdot (2(2S_1S_0 + 2)S_1 + 3) + 5 \\
&= 2(2(2(2 \cdot 2 \cdot 1 + 2) \cdot 2 + 3)(2 \cdot 2 \cdot 1 + 2) + 4) \cdot (2(2 \cdot 2 \cdot 1 + 2) \cdot 2 + 3) + 5 \\
&= 17717
\end{aligned}$$

Radi jednostanvosti zapisa umjesto $S(n)$ smo pisali S_n.

Primjer 2.2:

Posmatrajmo ravan i n tačaka u ravni, pri čemu je $n \geq 3$ i ne postoje tri tačke koje leže na istoj pravoj. Odredimo koliko je trouglova definisano sa ovih n tačaka. Posebno pronaći koliko je trouglova definisano sa 6 tačaka.

Rješenje:

Pristupimo rekurzivno posmatranom problemu. Obilježimo broj trouglova sa $T(n)$. Najjednostavniji slučaj je slučaj sa tri tačke ($n = 3$). Tada je očigledno definisan samo jedan trougao pa je $T(3) = 1$.

Neka je broj tačaka jednak $n-1$. Broj trouglova je $T(n-1)$. Posmatrajmo šta se dešava kada dodamo još jednu tačku. Sigurno ćemo imati $T(n-1)$ trouglova koji ne uključuju tačku n. Na to treba dodati trouglove kod kojih je jedno tjeme u novoj tački n. To su trouglovi:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,2,n) & (1,3,n) & (1,4,n) & \cdots & (1,n-1,n) \\
 & (2,3,n) & (2,4,n) & \cdots & (2,n-1,n) \\
 & & & & \vdots \\
 & & & (n-3,n-2,n) & (n-3,n-1,n) \\
 & & & & (n-2,n-1,n)
\end{array}$$

U prvom redu se nalazi $(n-2)$ trouglova, u drugom redu $(n-3)$ … u pretposlednjem 2 trougla i u poslednjem 1 trougao, tako da je ukupan broj dodatih trouglova:

$$1+2+\cdots+(n-3)+(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Što znači da je:

$$T(n)=T(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Konačno je rekurzivna relacija za broj trouglova:

$$\begin{aligned} T(3) &= 1 \\ T(n) &= T(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Odredimo $T(6)$ iterativno:

$$\begin{aligned} T(3) &= 1 \\ T(4) &= T(3)+\frac{(4-2)(4-1)}{2}=1+3=4 \\ T(5) &= T(4)+\frac{(5-2)(5-1)}{2}=4+6=10 \\ T(6) &= T(5)+\frac{(6-2)(6-1)}{2}=10+10=20 \end{aligned}$$

Pa je konačan odgovor: Sa 6 tačaka u ravni je definisano 20 trouglova (pod uslovom da ne postoje tri tačke koje leže na istoj pravoj).

Posmatrajmo sada problem određivanja broja trouglova na sledeći način:

Oprezno čitati!

Pretpostavimo da broj dodatih trouglova kada na $n-1$ tačku dodamo još jednu tačku (označimo je sa A) određujemo rekurzivno. Označimo ovaj broj sa $D(n)$. Očigledno je $D(3)=1$ i $D(4)=3$. Posmatrajmo sada kako je $D(n)$ povezano sa $D(n-1)$. Sigurni smo da je $D(n)=D(n-1)+X$ gdje je X broj trouglova koji se pojavljuju dodavanjem tačke n u skup od $n-1$ tačaka. Kako je jedno tjeme dodatih trouglova u tački A, drugo tjeme u tački n treće tjeme može biti bilo koja od tačaka $1,2,\ldots,(n-1)$ tako da imamo $X=(n-1)$ dodatih trouglova. Dakle vrijedi:

$$D(n)=D(n-1)+(n-1)$$

Sada je:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+D(n) \\ D(n) &= D(n-1)+(n-1) \end{aligned}$$

Napišimo izraze za $T(n)$ i $T(n-1)$:

$$T(n) = T(n-1) + D(n)$$
$$T(n-1) = T(n-2) + D(n-1)$$

i u prvom izrazu zamijenimo $D(n)$ njegovom rekurzivnom formulom. Dobićemo:

$$T(n) = T(n-1) + D(n-1) + (n-1)$$
$$T(n-1) = T(n-2) + D(n-1)$$

Iz druge jednačine izrazimo $D(n-1)$ i uvrstimo ga u prvu:

$$T(n) = T(n-1) + (T(n-1) - T(n-2)) + (n-1)$$

Konačno dobijamo:

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + n - 1$$

što je rekurzija drugog reda tako da uz nju moramo definisati dvije početne vrijednosti i rekurzivnu relaciju za broj trouglova napisati u obliku:

$$T(3) = 1$$
$$T(4) = 4$$
$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2) + n - 1$$

Vidimo da se ovo rješenje razlikuje od prethodnog. Ostavljamo čitaocu da pokuša dokazati da ove dvije definicije daju jedan niz $T(n)$.

2.1 Rekurzije u programiranju

U većini programskih jezika dozvolljeni su rekurzivni pozivi funkcija, odnosno funkcija se može pozvati iz same sebe. Naredni primjeri bazirani su na programskom paketu MATLAB koji dozvoljava rekurzivne pozive funkcija.

Posmatrajmo tri načina rješavanja problema određivanja zbira prvih n prirodnih brojeva:

1. Direktni pristup: $S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$

```
function y=S1(n)
y=0;
for k=1:n
    y=y+k;
end
```

2. Rekurzivni pristup: $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + n$

```
function y=S2(n)
if n==0
    y=0;
else
    y=S2(n−1)+n;
end
```

3. Rješenje problema u zatvorenoj formi: $S_n = n(n+1)/2$

```
function y=S3(n)
y=(n*(n+1))/2;
```

Možemo uočiti da je rekurzivni pristup programskom rješenju problema jednostavan za implementaciju jer se svodi na direktnu primjenu pravila rekurzije. U prvom pristupu relativno jednostavnu matematičku formulu moramo transformisati u oblik pogodan za programsku implementaciju. Treći slučaj je očigledno najjednostavniji slučaj koji daje rješenje sa najmanjim brojem operacija za velike vrijednosti n.

Odredimo broj operacija u sva tri slučaja:

Prvi slučaj: $n+1$ dodjela vrijednosti i n sabiranja, ukupno $2n+1$ operacija. Ovome treba dodati i broj operacija potreban za implementaciju `for` petlje (jedno dodjeljivanje, $n-1$ uvećavanja brojačke varijable za 1 i n ispitivanja uslova za završetak petlje) tako da je ukupan broj operacija $4n+1$.

Drugi slučaj: n pozivanja funkcije, n sabiranja, $n+1$ dodjela vrijednosti i $n+1$ operacija poređenja što daje $4n+2$ operacije.

Treći slučaj se svodi na jedno množenje, jedno oduzimanje, jedno dijeljenje i jednu dodjelu vrijednosti, pa je ukupan broj operacija 4.

Vidimo da, osim za $n = 0$ treći slučaj predstavlja najpovoljnije rješenje.

Analizirajmo sada potrebne memorijske resurse. Bez umanjenja opštosti smatraćemo da je za smještaj jedne varijable potrebna jedna memorijska riječ. Svaki poziv funkcije zahtijeva izdvajanje memorije za rezultat, za ulazne argumente i za povratnu adresu. Smatraćemo da povratna adresa funkcije takođe zahtijeva jednu memorijsku riječ.

U skladu sa navedenim u posmatranom primjeru potrebni memorijski resursi su:

Prvi slučaj: Potrebna je jedna memorijska riječ za pamćenje povratne adrese funkcije, tri memorijske riječi za varijable n, k i y, što daje ukupno četiri memorijske riječi.

Drugi slučaj: Za računanje vrijednosti $S(n)$ funkcija `S2(n)` se poziva n puta a svaki poziv zahtijeva jednu riječ za povratnu adresu, jednu za argument n i jednu za rezultat y, tako da je ukupan broj potrebnih memorijskih riječi $3n$.

Treći slučaj: Potrebne su tri memorijske riječi (jedna za povratnu adresu, jedna za n i jedna za y).

Uočite da memorijski zahtjevi u rekurzivnoj implementaciji rješenja problema zavise od reda problema, što je jako nepovoljno u poređenju sa memorijskim zahtjevima u prvom i trećem slučaju.

Posmatrajmo Fibonačijev niz i rekurzivni pristup programiranju funkcije koja kao argument uzima prirodan broj n a kao rezultat vraća n-ti Fibonačijev broj F_n.

```
function y=F(n)
if n==0 || n==1
    y=0;
else
    y=F(n-2)+F(n-1);
end
```

Označimo sa $N_o(n)$ broj operacija potrebnih da se izračuna veličina F_n. Na osnovu navedenog programskog rješenja možemo doći do rekurentne relacije koja vrijedi za $N_o(n)$:

$$N_o(n) = N_o(n-2) + N_o(n-1) + 6 \tag{10}$$

gdje su prva dva člana jasna a broj 6 odnosi se na jednu operaciju sabiranja, jednu operaciju dodjeljivanja vrijednosti dvije operacije poređenja i dvije operacije pozivanja funkcije. Jasno je da je $N_o(0) = 3$ i $N_o(1) = 3$. Primjenom rekurzivne relacije dobijamo

$$\begin{aligned}
N_o(2) &= 3 + 3 + 6 = 12 \\
N_o(3) &= 3 + 12 + 6 = 21 \\
N_o(4) &= 12 + 21 + 6 = 39 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

2.2 Rekurzije i matematička indukcija

Uočite da su prva i druga Peanova aksioma rekurzivna definicija prirodnih brojeva. U četvrtoj aksiomi govori se o prelasku sa m-tog slučaja u rješavanju nekog problema na $m+1$ slučaj, što dosta liči na naše rekurzivne definicije. Stoga nije neočekivano da su matematička indukcija i rekurzivne relacije u bliskoj vezi koju ćemo demonstrirati na primjeru.

Neka je niz brojeva B_n definisan rekurzivno

$$\begin{aligned} B_0 &= 100 \\ B_n &= 2 \cdot B_{n-1} \end{aligned}$$

Iterativni postupkom možemo odrediti vrijednosti niza:

$$\begin{aligned} B_1 &= 2B_0 = 200 \\ B_2 &= 2B_1 = 400 \\ B_3 &= 2B_2 = 800 \\ B_4 &= 2B_3 = 1600 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Za određivanje vrijednosti B_3 potrebna su 3 množenja, za određivanje B_4 četiri množenja … Možemo pretpostaviti da je za određivanje vrijednosti B_n potrebno n množenja. Ovu pretpostavku možemo dokazati metodom matematičke indukcije (dokaz izvedite sami).

Dalje, možemo na osnovu početnih pet vrijednosti niza uočiti pravilo da je

$$B_n = 100 \cdot 2^n$$

Uočavamo da je ova relacija tačna za $n = 0, 1, 2, 3$ i 4. Provjerimo da li ona vrijedi za sve vrijednosti n. Koristićemo matematičku indukciju kao metod provjere naše pretpostavke:

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $n = 0$. Provjerimo da li je

$$100 \cdot 2^0 = B_0$$

Kako je $100 \cdot 2^0 = 100$ i $B_0 = 100$ (iz definicije niza B_n) zaključujemo da je baza indukcije tačna.

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da naša formula vrijedi u slučaju $n = m$ gdje je $m \geq 0$ prirodan broj, odnosno pretpostavimo da vrijedi

$$B_m = 100 \cdot 2^m \tag{11}$$

Dokažimo da tada naša formula vrijedi i u slučaju $n = m+1$, odnosno dokažimo da je

$$B_{m+1} = 100 \cdot 2^{m+1}$$

Pođimo od lijeve strane i primijenimo rekurzivnu definiciju niza B. Dobijamo:

$$B_{m+1} = 2 \cdot B_m$$

Prema indukcijskoj pretpostavci je $B_m = 100 \cdot 2^m$ pa je sada

$$\begin{aligned} B_{m+1} &= 2 \cdot 100 \cdot 2^m = \\ &= 100 \cdot 2 \cdot 2^m = \\ &= 100 \cdot 2^{m+1} \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Sada smo sigurni da (11) vrijedi za svako n. Ovakva forma definisanja niza brojeva naziva se definicija u zatvorenom obliku. Osnovna prednost je u tome što je broj računskih operacija potrebnih za izračunavanje vrijednosti niza mali, u našem slučaju potrebna je jedna operacija množenja i jedna operacija stepenovanja, što je daleko efikasnije od rekurzivnog i od iterativnog pristupa. Na primjer za $n = 100$ kod iterativnog pristupa imamo 100 množenja, kod rekurzivnog 100 množenja i 100 rekurzivnih poziva dok korišćenjem (11) imamo samo dvije računske operacije.

Napomena: Ovdje je podrazumijevano da je operacija stepenovanja elementarna operacija, što ne mora biti tačno. Provjerite da se broj 2^{100} može dobiti sa samo 8 operacija množenja.

Primjer 2.3:

Data je rekurzivna relacija:

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 \\ S(1) &= 1 \\ S(n) &= \frac{S(n-1)S(n-2) + 12n - 4}{n^2 - 6n + 13} \end{aligned}$$

Pokažite da $S(n) = n^2$ zadovoljava posmatranu rekurziju.

Rješenje:

Dokaz možemo izvesti matematičkom indukcijom. Pokušajte sami provesti dokaz. Ovdje ćemo pokazati alterantivni način za provjeru da li je zadati niz brojeva rješenje rekurzije ili nije. Ovaj način se zasniva na prostoj zamjeni predloženog rješenja u formule koje definišu rekurziju i provjeru da li su dobijene jednakosti tačne za svako n.

Ako je $S(n) = n^2$ tada se rekurzivna relacija svodi na:

$$0^2 = 0$$
$$1^2 = 1$$
$$n^2 = \frac{(n-1)^2(n-2)^2 + 12n - 4}{n^2 - 6n + 13}$$

Prva i druga jednačina su očigledno tačne za svako n. Provjerimo treću jednačinu:

$$\begin{aligned}
n^2 &= \frac{(n-1)^2(n-2)^2 + 12n - 4}{n^2 - 6n + 13} \\
n^2 &= \frac{(n^2 - 2n + 1)(n^2 - 4n + 4) + 12n - 4}{n^2 - 6n + 13} \\
n^2 &= \frac{(n^2 - 2n + 1)(n^2 - 4n + 4) + 12n - 4}{n^2 - 6n + 13} \\
n^2 &= \frac{(n^4 - 4n^3 + 4n^2 - 2n^3 + 8n^2 - 8n + n^2 - 4n + 4) + 12n - 4}{n^2 - 6n + 13} \\
n^2 &= \frac{(n^4 - 6n^3 + 13n^2 - 12n + 4) + 12n - 4}{n^2 - 6n + 13} \\
n^2 &= \frac{n^4 - 6n^3 + 13n^2}{n^2 - 6n + 13} \\
n^2 &= \frac{n^2(n^2 - 6n + 13)}{n^2 - 6n + 13} \\
n^2 &= n^2
\end{aligned}$$

što je očigledno tačno za svako n. Time je provjereno da za svako n navedeno rješenje zadovoljava datu rekurzivnu relaciju.

Primjer 2.4:

Data je rekurzivna relacija:

$$S(3) = 3$$
$$S(n) = \frac{S(n-1)^2 - 1}{n-2}$$

Koristeći se matematičkom indukcijom dokažite da ovako definisan niz zadovoljava relaciju $S(n) \le n$ za svako $n \ge 3$.

Rješenje:

1. korak (baza): Provjerimo da li tvrdnja vrijedi za $n = 3$. Trebamo dokazati da je $S(3) \le 3$ a kako je $S(3) = 3$ to je baza indukcije očigledno tačna.

2. korak (indukcija): Pretpostavimo da je za neko n tačno

$$S(n) \le n$$

Dokažimo da je tada i

$$S(n+1) \le n+1$$

Iskoristimo rekurzivnu relaciju pa napišimo:

$$\begin{aligned}
S(n+1) &\le n+1 \\
\frac{S(n)^2-1}{(n+1)-2} &\le n+1 \\
\frac{S(n)^2-1}{n-1} &\le n+1 \\
S(n)^2-1 &\le (n-1)(n+1) \\
S(n)^2 &\le n^2
\end{aligned}$$

Iz indukcijske pretpostavke znamo da je $S(n) \le n$ pa je i $S(n)^2 \le n^2$, čime je indukcijski korak dokazan.

2.3 Rješenje rekurzivnog problema u zatvorenoj formi

Iz prethodnog primjera smo vidjeli da rekurzivno definisan problem može imati i nerekurzivni (direktni) način rješavanja, odnosno da se rješenje nekih rekurzivnih problema može pronaći u zatvorenoj formi.

Za neki aritmetički izraz kažemo da je dat u zatvorenoj formi ako nije zasnovan na rekurziji, sumama ili proizvodima kod kojih broj sabiraka, odnosno činilaca, zavisi od polaznih podataka.

Matematička definicija zatvorene forme rješenja bila bi da se za proizvoljni posmatrani problem rješenje može dobiti korišćenjem najviše N_{op} elementarnih operacija, pri čemu N_{op} ne zavisi od reda problema.

Posmatrajmo od ranije poznat problem određivanja zbira prvih n prirodnih brojeva

$$S_n = 0+1+2+\cdots+(n-1)+n$$

Ova definicija nije rekurzivna ali do rekurzivne definicije možemo doći na jednostavan način:

$$\begin{aligned} S_n &= 0+1+2+\cdots+(n-1)+n = \\ &= [0+1+2+\cdots+(n-1)]+n = \\ &= S_{n-1}+n \end{aligned}$$

Dakle, problem možemo definisati i rekurzivno

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_n &= S_{n-1}+n \end{aligned}$$

Kada smo govorili o matematičkoj indukciji dokazali smo da je

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

što predstavlja rješenje problema u zatvorenoj formi (potrebne su 3 računske operacije bez obzira na red problema n).

U prethodnim primjerima vidjeli smo da nizovi brojeva mogu biti definisani rekurzivno i da rješenje u zatvorenoj formi omogućava efikasno izračunavanje proizvoljnog elementa niza. Metod za dobijanje rješenja u zatvorenoj formi primjenljiv u slučajevima kada se radi o linearnim rekurzivnim relacijama obrađen je ranije kroz osnovni kurs iz predmeta Matematika u računarstvu.

Primjer 2.5:

Odredimo formulu za n-ti član Fibonačijevog niza u zatvorenom obliku. Rekurentna relacija je

$$F_n = F_{n-2}+F_{n-1}$$

sa početnim uslovima $F_0 = 1$ i $F = 1$.

Rješenje:

Napišimo rekurentnu relaciju u obliku

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

odakle vidimo da se radi o linearnoj rekurzivnoj relaciji (diferencnoj jednačini) II reda. Karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

a njena rješenja

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

pa je opšte rješenje diferencne jednačine

$$F_n = A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n$$

Konstante A i B određujemo iz početnih uslova:

$$F_0 = 1 = A + B$$
$$F_1 = 1 = A \cdot \lambda_1 + B \cdot \lambda_2$$

odakle je

$$\begin{aligned}
B &= 1 - A \\
A \cdot \lambda_1 + (1-A)\lambda_2 &= 1 \\
A(\lambda_1 - \lambda_2) &= 1 - \lambda_2 \\
A &= \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
A &= \frac{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\
A &= \frac{2-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\
B &= 1 - A = 1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\
B &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

pa je konačno

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \tag{12}$$

što predstavlja formulu za određivanje n-tog člana Fibonačijevog reda u zatvorenom obliku. Uočite da navedeno rješenje uključuje razlomke, pa čak i iracionalne brojeve ($\sqrt{5}$) a svi Fibonačijevi brojevi su prirodni brojevi.

Prethodni izraz se može napisati i u nešto jednostavnijem obliku:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \tag{13}$$

Pokušajte da matematičkom indukcijom dokažete da je niz definisan sa (12) Fibonačijev niz.

Interesantno je dokazati i da je izraz definisan formulom (13) prirodan broj za svako n. I u ovom slučaju matematička indukcija je preporučeni metod izvođenja dokaza.

2.4 Rješavanje nehomogenih rekurzija

Od ranije je poznato da se rješavanje nehomogene linearne rekurzivne jednačine svodi na rješavanje odgovarajuće homogene jednačine i traženje partikularnog rješenja. Ovdje će ukratko biti izložen način pretpostavljanja partikularnog rješenja u slučajevima kada standardni postupci ne dovode do rješenja.

Na primjer, ako je desna strana rekurzivne jednačine oblika $a_0 n + b_n$ tada se partikularno rješenje pretpostavlja u obliku $S_n^P = an + b$, gdje su a i b proizvoljne konstante. Uvrštavanjem u polaznu jednačinu dolazi se do konkretnih vrijednosti parametara a i b. Sve ovo vrijedi u slučaju da $\lambda = 1$ nije rješenje karakteristične jednačine. Ukoliko to nije slučaj, odnosno ako je $\lambda = 1$ rješenje karakteristične tada se može pokazati da postoji partikularno rješenje oblika $S_n^P = n(an + b)$. Navedeno vrijedi samo ako je $\lambda = 1$ korijen prvog reda.

Primjer 2.6:

Riješiti rekurzivnu relaciju

$$S_n = S_{n-1} + n$$

ako je $S_0 = 0$.

Rješenje:

Relacija je nehomogena:

$$S_n - S_{n-1} = n$$

Riješićemo prvo odgovarajuću homogenu jednačinu:

$$S_n - S_{n-1} = 0$$

čija je karakteristična jednačina

$$\lambda - 1 = 0$$

i karakteristična vrijednost

$$\lambda_1 = 1$$

Tako da je opšte rješenje homogene jednačine

$$S_n^H = A \cdot 1^n = A$$

Partikularno rješenje nećemo naći u obliku

$$S_n^P = an + b$$

jer je $\lambda = 1$ rješenje karakteristične. Dobili bi smo

$$\begin{aligned} an + b - a(n-1) - b &= n \\ a &= n \end{aligned}$$

a kod ovog izraza ne možemo odabrati a i b takve da bude tačan za svako n.

Stoga potražimo rješenje u obliku

$$S_n^P = n(an + b)$$

dobijamo

$$\begin{aligned} n(an+b) - (n-1)(an - a + b) &= n \\ an^2 + bn - an^2 + an - bn + an - a + b &= n \\ (2a)n - a + b &= n \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} 2a &= 1 \\ -a + b &= 0 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{1}{2} \\ S_n^P &= n(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

pa je sada opšte rješenje nehomogene jednačine

$$S_n = S_n^H + S_n^P = A + \frac{n(n+1)}{2}$$

Iz uslova $S_0 = 0$ dobijamo $A + 0 = 0$, odnosno $A = 0$. Konačno traženo rješenje je

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Navedimo i opšte pravilo za nalaženje partikularnog rješenja linearne nehomogene rekurzivne relacije. Ako je nehomogeni dio relacije oblika:

$$P_N(n) \cdot c^n$$

gdje je $P_N(n)$ polinom N-tog stepena po varijabli n, i ukoliko je c rješenje karakteristične jednačine reda p (pri čemu smatramo da je $p = 0$ ukoliko c nije rješenje karakteristične jednačine), tada postoji partikularno rješenje oblika

$$S_n^P = n^p \cdot Q_N(n) \cdot c^n$$

Ovdje je $Q_N(n)$ polinom istog reda kao polinom $P_N(n)$ sa nepoznatim koeficijentima. Neki karakteristični primjeri navedeni su u tabeli.

Nehomogeni dio	Karakteristične vrijednosti	Oblik partikularnog rješenja
5	$3, 2, 4$	a
$2n-3$	$5, 6$	$an+b$
$n^3 \cdot 3^n$	$2, 2, 1$	$(an^3+bn^2+cn+d)\cdot 3^n$
3	$1, 1, 5$	an^2
$n \cdot 2^n$	$2, 4$	$n\cdot(an+b)\cdot 2^n$
n^3	$1, -1, 2$	$n\cdot(an^3+bn^2+cn+d)$
$(n+2)\cdot 5^n$	$1, 1, 1, 5$	$n\cdot(an+b)\cdot 5^n$

2.5 Zadaci

1. Niz L_n je definisan rekurzivno:

$$L_0 = 5$$
$$L_n = 2L_{n-1} - 7 \text{ za } n \geq 1$$

Koristeći se matematičkom indukcijom pokažite da je

$$L_n = 7 - 2^{n+1}$$

2. Odredite zatvoreni oblik formule za broj računskih operacija u prethodno analiziranom programu za rekurzivno izračunavanje Fibonačijevih brojeva. Broj računskih operacija definisan je rekurzivnom formulom (10).

3. Pronađite rješenje, u zatvorenoj formi, rekurzivne relacije:

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= 3\\
Q_1 &= 5\\
Q_n &= \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}} \text{ za } n \geq 2
\end{aligned}
$$

4. U programskom jeziku, izabranom po vašoj želji, napišite rekurzivnu funkciju za računanje Fibonačijevih brojeva. Koristeći se napisanom funkcijom izračunajte F_{100}. Odredite koliko vremena se potroši za računanje F_{30}.

5. Delegacija od n osoba dolazi u posjetu. Domaćini ih dočekuju tako što formiraju tim od m osoba. Prilikom susreta očekuje se da se svaki gost rukuje sa svakim domaćinom.

   (a) Pronađite rekurzivnu relaciju za ukupan broj rukovanja $R(n)$.

   (b) Pronađite zatvorenu formu za izraz $R(n)$.

6. Posmatra se problem reda N pri čemu je N stepen dvojke. Problem se rješava rekurzivno, svođenjem na rješavanje dva slična problema reda $N/2$ i obavljanje $3N+5$ operacija da bi se od dva dobijena rješenja dobilo rješenje polaznog problema. Poznato je da problem reda 1 zahtijeva 5 operacija.

   (a) Pronađite rekurzivnu relaciju za ukupan broj operacija potrebnih za rješavanje problema reda N.

   (b) Pronađite rješenje (u zatvorenoj formi) dobijene rekurzivne relacije.

7. Data je rekurzivna relacija:

$$
\begin{gathered}
S(0) = 1\\
S(1) = 3\\
S(n) - 5 * S(n-1) + 6 * S(n-2) = -2^n + (12n-17)\cdot(-1)^n + 6
\end{gathered}
$$

   (a) Izračunajte $S(2)$ i $S(3)$.

(b) Pronađite rješenje (u zatvorenoj formi) date rekurzivne relacije.

(c) Provjerite rješenje pod (b) koristeći se rezultatima pod (a) i podatkom da je $S(10) = 76470$.

3 Sume i proizvodi

U prethodnim poglavljima često razmatran problem je bio određivanje zbira n brojeva, na primjer prvih n neparnih brojeva

$$1+3+5+\dots+(2n-1) \tag{14}$$

ili zbir prvih n prirodnih brojeva

$$1+2+3+\dots+n \tag{15}$$

ili u opštem obliku

$$a_1+a_2+\dots+a_n$$

gdje su a_k bilo kakvi izrazi koji zavise od k.

U rješavanju pojedinih problema pojavljivao se i proizvod

$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n \tag{16}$$

U razmatranim slučajevima posmatrani izraz nema tačno određen broj sabiraka (činilaca) tako da je korišćen simbol … pri čemu se smatralo jasnim kako treba napisati zbir, odnosno proizvod, u svakom konkretnom slučaju. Ova notacija nije dovoljno precizna. Jedan od uzroka nepreciznosti je ponašanje izraza za male vrijednosti n. Na primjer izraz (14) se za $n=2$ svodi na

$$1+3$$

i vidimo da se na lijevoj strani ne pojavljuje sabirak 5 koji se javlja u izrazu (14).

Sa druge strane, izraz

$$1+2+3+\dots+n$$

možemo tumačiti kao zbir prvih n prirodnih brojeva a takođe i kao zbir elemenata Fibonačijevog niza gdje je sa n obilježen poslednji Fibonačijev broj. Dakle nije jasno da li nakon sabirka 3 treba biti sabirak 4 ili sabirak 5 ili bilo koji drugi prirodni broj jer je jasno da nijedan niz prirodnih brojeva nije određen sa konačno mnogo početnih članova.

Na kraju, izraz:

$$1+1+1+\ldots+1$$

nema nikavo značenje jer iz njega ne možemo zaključiti koliko sabiraka učestvuje u sumi.

Dakle, korišćena notacija je dobra jedino ukoliko dodatnim objašnjenjima otklonimo moguće nedoumice u njenom tumačenju.

Uvedimo oznaku Σ koja će označavati sume tipa (14), (15) i (16) na sledeći način:

- Σ označava sabiranje elemenata.
- Nakon oznake Σ navešćemo izraz koji će jasno i precizno odrediti k-ti elemenat sume. Ovaj izraz naziva se sumand, i u opštem slučaju zavisi od rednog broja sabirka k.
- Potrebno je dodatno definisati koji je početni i koji je krajnji sabirak sume. Najlakši način je da zadamo granice u kojima se kreće indeks sabirka k.
- Nakon što se odredi suma, rezultat ne smije zavisiti od rednog broja sabiraka u sumi (k). Redni broj sabirka k se često naziva varijablom po kojoj se vrši sumiranje.

Opšti slučaj zbira n članova

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

možemo zapisivati kao:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

gdje jasno možemo uočiti sumand kao i granice indeksa k sabiraka koji se koriste u sumi. Alternativno možemo pisati

$$\sum_{1 \le k \le n} a_k$$

gdje je ispod simbola Σ naveden uslov koji varijabla k treba da zadovolji pa da član a_k bude uključen u sumu.

Postoji i matematička notacija tipa

$$\sum a_k [1 \le k][k \le n]$$

gdje je

$$[uslov] = \begin{cases} 1 \text{ ako je } uslov \text{ tačan} \\ 0 \text{ ako } uslov \text{ nije tačan} \end{cases}$$

pri čemu se podrazumijeva da se sabiranje uvijek vrši po cijelom skupu prirodnih (odnosno cijelih) brojeva i da će se izrazima $[uslov]$ eliminisati nepotrebni članovi (u sumi se pojavljuju kao $a_k \cdot 0 = 0$ za proizvoljno a_k).

U nekim slučajevima nije jednostavno definisati k-ti član sume. Na primjer ako se radi o zbiru P_N prostih brojeva manjih od N, ne postoji jednostavna formula koja bi kao rezultat dala k-ti prost broj. U tom slučaju koristićemo se notacijama sa uslovima i pisati

$$\begin{aligned} P_N = \sum_{\substack{k \text{ je prost broj} \\ k < N}} k &= \sum k [k \text{ je prost broj}][k < N] = \\ &= 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + \cdots + P \end{aligned}$$

gdje je sa P označen najveći prosti broj manji od N.

U interesu nam je da odredimo vrijednost sume bez potrebe za direktnim sabiranjem njenih članova, na primjer na osnovu prethodno dokazanog možemo tvrditi da je

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Proizvode činilaca a_k ćemo, analogno, označavati sa:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{1 \le k \le n} a_k$$

Zapis proizvoda sa korišćenjem logičkih uslova nije uobičajen (iz proizvoda ne smijemo uklanjati članove množeći ih sa nulom kao kod slučaja suma). Teorijski možemo koristiti oznaku oblika

$$\prod (1 + (a_k - 1) \cdot [uslov])$$

ali je ovakva oznaka nejasna i komplikovana.

U ovom poglavlju, nakon uvođenja terminologije, bavićemo se problemima određivanja vrijednosti suma i proizvoda, kao i njihovih približnih vrijednosti u slučajevima kada ne možemo doći do rješenja u zatvorenom obliku.

3.1 Sume i rekurzije

Neka je sa S_n obilježena suma proizvoljnih sabiraka a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{17}$$

Navedena suma lako se može transformisati u rekurzivnu formulu:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n$$

za $n \ge 1$ i kako je $S_0 = a_0$ dobijamo rekurziju definisanu sa

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_n &= S_{n-1} + a_n \end{aligned} \tag{18}$$

Transformaciju možemo provesti i u obrnutom smjeru, odnosno od rekurzije dobiti sumu. Posmatrajmo rekurziju oblika:

$$\begin{aligned} S_0 &= b \\ S_n &= S_{n-1} + a_n \end{aligned} \tag{19}$$

Imamo da je:

$$\begin{aligned} S_0 &= b \\ S_1 &= b + a_1 \\ S_2 &= b + a_1 + a_2 \\ S_3 &= b + a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Odakle izvlačimo zaključak da je:

$$S_n = b + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

što možemo dokazati matematičkom indukcijom ili, jednostavnije, uvrštavanjem u forumlu (19). Posmatrajmo opšti slučaj rekurzije prvog reda

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n$$

gdje je T_n nepoznati niz kome je poznat prvi član T_0 dok su a_n, b_n i c_n poznati izrazi koji mogu (a ne moraju) zavisiti od n. Pomnožimo lijevu i desnu stranu prethodne jednačine sa s_n odabranim tako da bude

$$s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1} \tag{20}$$

dobićemo

$$\begin{aligned} s_n a_n T_n &= s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n \\ s_n a_n T_n &= s_{n-1} a_{n-1} T_{n-1} + s_n c_n \end{aligned}$$

Uvedimo sada novi niz $S_n = s_n a_n T_n$. Dobijamo

$$S_n = S_{n-1} + s_n c_n$$

odakle je

$$S_n = s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k$$

i konačno

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) \tag{21}$$

Dakle, dobrim odabirom faktora s_n proizvoljna rekurzija prvog reda se može svesti na sumu. Ostaje nam da vidimo kako u konkretnom slučaju odabrati faktor s_n. Pođimo od uslova (20)

$$s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$$
$$s_n = \frac{a_{n-1}}{b_n} s_{n-1} = \frac{a_{n-1} a_{n-2}}{b_n b_{n-1}} s_{n-2} = \ldots$$

konačno dobijamo

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \ldots a_1}{b_n b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_2} s_1$$

Ovdje treba voditi računa o tome da nijedna vijednost u brojiocu ni u imeniocu posmatranog izraza ne bude jednaka nuli. Faktor s_1 odaberimo proizvoljno, najjednostavniji slučaj je $s_1 = 1$. Uočite da iz uslova $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$ koji zadovoljava niz s_n dobijamo stavljajući $n = 1$ da je $s_1 b_1 = s_0 a_0$, odakle je $s_0 = s_1 b_1 / a_0$. član s_0 možemo eliminisati iz relacije (21) tako da dobijamo rješenje (uz $s_1 = 1$) u obliku:

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right)$$

Primjer 3.1:

Riješimo rekurziju

$$2T_n = nT_{n-1} + 4$$

sa početnim uslovom $T_0 = 0$.

Rješenje:

Ovdje je $a_n = 2$, $b_n = n$ i $c_n = 4$. Tako da je

$$s_n = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

pa je sada

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) = \frac{n!}{2^{n-1} \cdot 2} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1} \cdot 4}{k!}$$

odnosno

$$T_n = 2\frac{n!}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$$

Došli smo do izraza za T_n u obliku sume.

3.2 Aproksimacije izraza koji sadrže sume

U prethodnom primjeru nijesmo pronašli rješenje za T_n u zatvorenoj formi. Problem predstavlja suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$$

do čijeg rješenja u zatvorenoj formi nije jednostavno doći. Pokušajmo odrediti približnu vrijednost za izraz T_n odnosno granice A_n i B_n takve da je

$$A_n \leq T_n \leq B_n$$

Od interesa nam je analiza ponašanja izraza T_n za relativno velike vrijednosti n, jer, ako je n malo $(1,2,3,4,5)$ lako možemo naći tačnu vrijednosti T_n direktnom primjenom formule

$$T_n = 2\frac{n!}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$$

Uočimo da je za $n \geq 1$ suma u izrazu za T_n veća ili jednaka od svog prvog člana, odnosno

$$2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$$

Dakle vrijedi

$$4\frac{n!}{2^n} \leq T_n$$

Uočite da lako možemo dobiti i precizniju granicu smatrajući da se suma sastoji od 4 ili više članova, odnosno stavljajući

$$6 = 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} = \sum_{k=1}^{3} \frac{2^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!}$$

odakle slijedi

$$12\frac{n!}{2^n} \leq T_n$$

što vrijedi za $n \geq 4$.

Sa druge strane vrijedi i

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2 < 2^{n+1}$$

(formula za geometrijsku progresiju $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ biće izvedena u narednom poglavlju)

$$T_n \leq 4n!$$

Dobili smo dakle granice

$$4\frac{n!}{2^n} \leq T_n \leq 4n!$$

Uočite da su granice prilično široke. Na prmijer za $n = 10$ gornja granica je 1024 puta veća od donje.

Preciznije određivanje gornje granice možemo izvesti na sledeći način. U matematičkoj analizi je poznata formula za razvoj eksponencijalne funkcije u stepeni red:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

koja liči na našu sumu, ali je problem u gornjoj granici koja je kod posmatrane sume beskonačna. Možemo iskoristiti ovo znanje da bliže odredimo granice veličine T_n.

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} < e^2 - 1$$

i tako doći do procjene

$$T_n < 2(e^2 - 1)\frac{n!}{2^n}$$

tako da je sada

$$12\frac{n!}{2^n} \leq T_n < 2(e^2 - 1)\frac{n!}{2^n}$$

i sada se gornja i donja granica razlikuju tačno za $(e^2 - 1)/6 \approx 1.0648$ put za svako n. Kako je za veće vrijednosti n greška u aproksimaciji sume u izrazu T_n za slučaj gornje granice sve manja i manja možemo tvrditi da je za velike vrijednosti n

$$T_n \approx 2(e^2 - 1)\frac{n!}{2^n}$$

Za $n = 6$ dobijamo da je $T_6 = 143$, dok aproksimativna formula daje rezultat $143,7538$. Za $n = 15$ je $T_{15} = 509936822$ a aproksimativna formula daje vrijednost $509936822,2830617$.

Primjer 3.2:

Odredite granice za sumu

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2}$$

Posebno odredite interval, ne širi od 30, u kojem se nalazi vrijednost S_{90}.

Rješenje primjera 3.2 :

Očigledno je svaki član sume razlomak kod kojeg je imenilac za jedan veći od brojioca, što znači da je razlomak manji od 1. To nas vodi ka izrazu:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2} < \sum_{k=1}^{n} 1$$

odnosno:

$$S_n < n$$

Napišimo sada sumu u razvijenom obliku:

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n+1}{n+2}$$

Uočite da je prvi sabirak manji od svih ostalih sabiraka. Sada možemo reći da je:

$$S_n \geq \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \cdots \frac{2}{3}}_{n \text{ sabiraka}}$$

Odnosno:

$$S_n \geq \frac{2}{3}n$$

Granice za sumu su:

$$\frac{2}{3}n \leq S_n < n$$

Uočite da je gornja granica 1,5 put veća od donje granice. Za $n = 90$ dobijamo:

$$60 \leq S_{90} < 90$$

Što predstavlja interval u kojem se nalazi S_{90}. Širina intervala je 30 tako da je uslov iz postavke zadatka ispunjen.

3.3 Određivanje suma metodom perturbacije

Posmatrajmo sumu

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Napišimo S_{n+1} na dva načina:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \tag{22}$$

$$S_{n+1} = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} \tag{23}$$

izdvajajući poslednji, odnosno prvi član sume.

Sada pokušajmo da sumu

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

svedemo na sumu S_n. Tada do izraza za sumu S_n u nekim slučajevima možemo doći izjednačavajući (22) sa (23).

Primjer 3.3:

Odrediti vrijednost sume

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

Rješenje:

Pišemo:

$$S_{n+1} = S_n + 2^{n+1}$$

odnosno izdvajajući prvi član:

$$S_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} = 1 + 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2S_n$$

Sada je

$$S_n + 2^{n+1} = 1 + 2S_n$$
$$2^{n+1} - 1 = 2S_n - S_n$$

odnosno

$$S_n = 2^{n+1} - 1$$

3.4 Često korišćene sume

Ovdje će biti navedeni izrazi za neke, često korišćene, sume. U nekim slučajevima izraz za sumu u zatvorenoj formi ne postoji.

- Zbir prvih n prirodnih brojeva:

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

- Zbir prvih n neparnih prirodnih brojeva:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

- Zbir prvih n parnih prirodnih brojeva:

$$2+4+6+\cdots+(2n)=\sum_{k=1}^{n} 2k=n(n+1)$$

- Zbir kvadrata prvih n prirodnih brojeva:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Zbir kubova prvih n prirodnih brojeva:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

- Geometrijska progresija sa n sabiraka (q je proizvoljan broj):

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1} q^k=\frac{1-q^n}{1-q}$$

- Harmonijski brojevi se javljaju u analizi nekih algoritama sortiranja. Označavamo ih sa H_n a definisani su kao:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n$$

  Za velike vrijednosti n može se pokazati da je $H_n \approx \gamma+\ln n$ gdje je ln prirodni logaritam a $\gamma \approx 0.57721566$ Euler-ova konstanta.

Euler se izgovara kao „Ojler”.

3.5 Zadaci

1. Odredite granice u kojima se nalazi suma:

$$T(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k+1}$$

   Granice treba da budu takve da gornja granica nije veća od trostruke donje granice.

2. Metodom perturbacije odrediti sumu:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$$

3. Metodom perturbacije odrediti sumu:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$$

4. Pronađite rješenje rekurzije

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k$$

ako je $C_0 = 0$. Veličina C_n predstavlja prosječan broj operacija poređenja potrebnih za sortiranje n slučajno raspoređenih veličina primjenom „quicksort” algoritma. (Savjet: napišite izraze za C_n i C_{n-1} i pokušajte ih iskombinovati da se oslobodite sume u definiciji rekurzije).

4 Osnovi teorije grafova

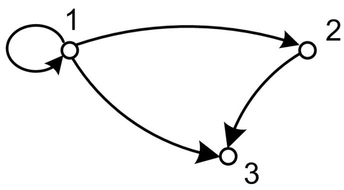
Posmatrajmo skup V i skup $B \subset V \times V$, gdje je sa $\times$ označen Dekartov proizvod skupova. Uređen par (V,B) nazivamo grafom. Skup V nazivamo skup čvorova, a skup B skupom grana posmatranog grafa. Vidimo da grana predstavlja uređen par čvorova grafa. Kažemo da grana (a,b) izlazi iz čvora a i ulazi u čvor b posmatranog grafa.

Na osnovu definicije, grafove možemo reprezentovati u skupovnoj formi, na primjer

$$\left\{ \{1,2,3\},\ \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3)\} \right\}$$

što predstavlja metamatički precizan zapis grafa.

Drugi način predstavljanja grafova je grafički. Elemente skupa V (čvorove) predstavimo tačkama u ravni, a elemente skupa B orjentisanim linijama koje izlaze iz i ulaze u čvorove grafa. Graf iz prethodnog primjera grafički je predstavljen na slici 1.



Slika 1: Primjer grafa

Ovakve grafove nazivamo **orjentisani grafovi**. Ukoliko svi elementi skupa V imaju osobinu da

$$(a,b) \in V \text{ povlači da je i } (b,a) \in V$$

graf nazivamo **neorjentisanim**. U tom slučaju u grafičkoj reprezentaciji grafa možemo značajno smanjiti broj grana ukoliko ih predstavljamo kao neorjentisane, podrazumijevajući da jedna grana povezuje polazni čvor sa krajnjim i krajnji sa polaznim.

Čvorovi i grane grafa veoma često imaju jasan praktični smisao, na primjer: čvorovi mogu biti gradovi a grane putevi između njih, ili čvorovima možemo predstaviti računare u računarskoj mreži a granama načine komuniciranja... U oba navedena primjera grane imaju i dodatna svojstva koja se ne nalaze u strukturi grafa (dužina puta, brzina komunikacionog kanala...).

U opštem slučaju, svakoj grani možemo pridružiti atribut (ili atribute). Ukoliko se radi o numeričkom podatku, atribut grane nazivamo težinom.

Sada se svaka grana može predstaviti uređenom trojkom (a, b, T) gdje ju a i b polazni i krajnji čvor grane a T njena težina.

Napomenimo da prethodna definicija grafa ne podrazumijeva postojanje više grana koje izlaze iz čvora a a ulaze u čvor b. Ukoliko svakoj grani dodijalimo težinu otvara se mogućnost da razmatramo i grafove kod kojih između dva čvora postoji više grana (sa različitim težinama). Ovakvi grafovi nazivaju se multigrafovi.

Ukoliko se početni čvor grane grafa poklapa sa krajnjim tada takvu granu nazivamo **petlja**. Graf koji nema nijednu petlju naziva se **prosti graf**.

Kompletan graf je onaj graf kod kojeg za proizvoljna dva čvora a i b postoji grana koja povezuje čvorove a i b. Kompletan graf sa n čvorova obilježavaćemo sa K_n.

Stepen grafa je broj čvorova posmatranog grafa. **Veličina grafa** je broj grana posmatranog grafa.

Primjer 4.1:

Pronađite kolika je veličina kompletnog grafa stepena n u slučaju da je graf (a) orjentisan, (b) neorjentisan i (c) neorjentisan i prost

Rješenje:

Navedenim problemima pristupimo rekurzivno. Označimo broj grana sa K_n.

(a) U najprostijem slučaju grafa ja jednim čvorom imamo da je $K_1 = 1$.

Dodavanjem jednog čvora u kompletan orjentisan graf sa $n-1$ čvorom potrebno je: povezati čvor n sa samim sobom (petlja od n do n, povezati sve postojeće čvorove sa novim čvorom (grane od p do n za $p = 1, 2, \ldots, n-1$) i na kraju povezati novi čvor sa postojećim čvorovima (grane od n do p za $p = 1, 2, \ldots, n-1$). Dodali smo ukupno $1 + (n-1) + (n-1) = 2n - 1$ grana. Sada je rekurzivna relacija za veličinu grafa:

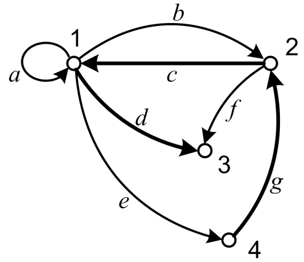
$$K_n = K_{n-1} + 2n - 1$$

Uz početni uslov $K_1 = 1$. Transformisanjem navedene rekurzije u sumu dobijamo:

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

(b) Imamo da je $K_1 = 1$ i rekurzivnu relaciju:

$$K_n = K_{n-1} + n$$



Slika 2: Primjer putanje: Debljom linijom su naznacene grane koje čine putanju. Putanju mozemo zapisati u obliku niza grana: g, c, d ili u obliku niza čvorova: 4, 2, 1, 3.

čije je rješenje:

$$K_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(c) Imamo da je $K_1 = 0$ i rekurzivnu relaciju:

$$K_n = K_{n-1} + n - 1$$

sa rješenjem:

$$K_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Putanja predstavlja niz grana grafa sa osobinom da je krajnji čvir k-te grane u nizu početni čvor naredne $(k+1)$ grane. Početni čvor prve grane u putanji naziva se početak putanje, a krajnji čvor poslednje grane u putanji - krajnji čvor putanje.

Putanja kod koje se kroz jedan čvor prolazi najviše jedan put naziva se **prosta putanja**.

Ukoliko je početni čvor putanje jednak krajnjem čvoru, tada se putanja naziva **ciklus**, kontura ili petlja. Možemo govoriti i o prostim ciklusima kod kojih se kroz jedan čvor prolazi najviše jedan put.

U opštem slučaju putanju zapisujemo kao niz grana. Ovakav zapis moguće je primijeniti na orjentisane, neorjentisane grafove kao i na multigrafove. Ako se radi o orjentisanom ili neorjentisanom grafu tada se putanja može jednostavno zapisati kao niz čvorova.

U grafu na slici 2 možemo definisati više putanja: putanja $2,1,4,2$ je ciklus i to prosti ciklus, putanja $2,1,1,4,2$ je ciklus ali nije prost, putanja $1,4,2,1,2$ nije prosta putanja, dok niz čvorova $1,2,3,4$ ne predstavlja putanju u posmatranom grafu jer ne postoji grana od čvora 3 do čvora 4.

Dužina putanje, odnosno ciklusa, je broj grana koje čine putanju (ciklus).

Graf G je **povezan** ako za svaka dva čvora a i b grafa G postoji putanja od čvora a do čvora b ili putanja od čvora b do čvora a. Ukoliko za svaka dva čvora grafa vrijedi da postoje obje putanje: od a do b i od b do a tada kažemo da je graf **jako povezan**. U slučaju neorjentisanih grafova termini „povezan" i „jako povezan" graf su ekvivalentni.

Podgraf posmatranog grafa $G = (V,B)$ je graf $G_1 = (V_1,B_1)$ takav da je $V_1 \subset V$ i $B_1 \subset B$. Ukoliko je $V_1 = V$ tada govorimo o pravom podgrafu, odnosno razapinjujućem podgrafu posmatranog grafa.

Drvo je povezan graf u kojem ne postoji nijedna zatvorena putanja (ciklus).

Stablo posmatranog grafa G je razapinjujući podgraf datog grafa koji je drvo. Grane grafa koje nijesu uključene u stablo nazivaju se **kostablo** i imaju osobinu da se dodavanjem proizvoljne grane iz kostabla stablu dobija graf koji ima samo jedan ciklus. Ukoliko za svaku granu kostabla pronađemo odgovarajući ciklus dobijamo takozvane nezavisnie cikluse posmatranog grafa.

Graf je **planaran** ako se može nacrtati u ravni tako da se grane ne sijeku. Kompletan graf sa četiri (i manje od četiri) čvora je planaran graf, dok kompletan graf sa 5 (i više) čvorova nije planaran graf.

Graf $G = (V,B)$ se naziva **bipartitnim** ukoliko se skup čvorova V može podijeliti na dva disjunktna podskupa V_1 i V_2 tako da ne postoji nijedna grana u skupu grana koja povezuje dva čvora iz skupa V_1 i nijedna grana ne povezuje dva čvora iz skupa V_2. Skupovi V_1 i V_2 imaju osobine: $V_1 \cup V_2 = V$ i $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, dok skup B ima odobinu da je za svaku granu $(a,b) \in B$ tačno ($a \in V_1$ i $b \in V_2$) ili ($a \in V_2$ i $b \in V_1$). Ne postoji grana $(a,b) \in B$ takva da je $a,b \in V_1$ ili $a,b \in V_2$.

Kompletan bipartitni graf je bipartitni graf koji sadrži sve dozvoljene grane. Ako skup V_1 ima n elemenata, a skup V_2 m elemenata, kompletan bipartitni graf označavamo sa $K_{n,m}$. Uočite da nijedan bipartitni graf ne može sadržati petlje.

4.1 Reprezentacije grafova

Iz same definicije možemo zaključiti da je graf definisan nizom čvorova i nizom grana. Kako proizvoljno programsko okruženje nudi načine za efikasan rad sa nizovima objekata, to ovaj način predstavlja prirodan način reprezentacije grafa na računaru. Niz grana nazivamo i listom incidencije grafa.

Posmatramo li problem ispitivanja da li je čvor a grafa povezan sa čvorom b vidimo da se procedura svodi na pretraživanje niza grana koje, u opštem slučaju grafa sa velikim brojem čvorova i grana može biti vremenski zahtjevno. Sve informacije o grafu možemo zapisati i u obliku liste susjedstva, gdje za svaki čvor a bilježimo listu čvorova b_n takvih da postoji grana (a, b_n). Ovakav način zapisa odgovara postavljenom problemu ispitivanja da li od čvora a postoji grana ka čvoru b.

Grafove možemo predstavljati i u matričnoj formi.

Matrica susjedstva **A** grafa sa N čvorova je kvadratna matrica reda N. Elementi matrice **A** su

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ako ne postoji grana od čvora } i \text{ do čvora } j \\ 1 \text{ ako postoji grana od čvora } i \text{ do čvora } j \end{cases}$$

Lako je uočiti da je kod neorjentisanih grafova matrica **A** simetrična, odnosno $a_{ij} = a_{ji}$.

Matrica incidencije **G** je matrica koja ima onoliko vrsta koliko graf ima čvorova i onoliko kolona koliko graf ima grana. Ona se definiše različito za slučaj orjentisanog i neorjentisanog grafa. Ako je graf orjentisan tada je

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ako čvor } i \text{ nije ni polazni ni krajnji čvor grane } j \\ -1 \text{ ako je čvor } i \text{ polazni čvor grane } j \\ 1 \text{ ako je čvor } i \text{ krajnji čvor grane } j \end{cases}$$

Jasno je da u jednoj vrsti matrica **G** ima samo jednu vrijednost -1 i samo jednu vrijednost 1. Ostale vrijednosti u toj vrsti su jednake nuli.

Za slučaj neorjentisanog grafa elementi matrice incidencije definišu se kao:

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ ako čvor } i \text{ nije ni polazni ni krajnji čvor grane } j \\ 1 \text{ ako je čvor } i \text{ polazni ili krajnji čvor grane } j \end{cases}$$

Ova matrica u svakoj vrsti ima tačno dva elementa jednaka 1, a svi ostali elementi su 0.

4.2 Osobine matrice susjedstva grafa

Matrica susjedstva neorjentisanog grafa je simetrična. Dokaz: Ako postoji grana od čvora k do čvora p tada u neorjentisanom grafu postoji i grana od čvora p do čvora k. Na osnovu toga i definicije elemenata matrice susjedstva $a_{pk} = 1$ povlači i $a_{kp} = 1$. To znači da su jedinice u matrici **A** simetrično postavljene, a kako se matrica sastoji samo od nula i jedinica zaključujemo da je matrica **A** simetrična.

Ulazni stepeni čvorova mogu se dobiti sabiranjem kolona matrica **A**. Izlazni stepeni čvorova dobijaju se sabiranjem vrsta matrice **A**.

Broj jedinica u matrici **A** (zbir svih elemenata matrice) je jednak broju grana (veličini grafa) za slučaj orjentisanog grafa. Ako je graf neorjentisan tada se broj grana dobija kao zbir elemenata na glavnoj dijagonali matrice **A** i iznad nje (ili ispid nje jer matrica je u ovom slučaju simetrična).

Prost graf (graf bez petlji) ima nule na glavnoj dijagonali matrice susjedstva.

Matrica susjedstva kompletnog (prostog) grafa ima nule na glavnoj dijagonali i sve ostale elemente jednake 1.

Matrica susjedstva bipartitnog grafa može se predstaviti u blok formi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

gdje je $\mathbf{0}$ matrica kod koje su svi elementi jednaki nuli, $\mathbf{A}_{12}$ matrica koja predstavlja grane koje polaze iz skupa V_1 a završavaju se u skupu V_2 i $\mathbf{A}_{21}$matrica koja predstavlja grane koje polaze iz skupa V_2 a završavaju se u skupu V_1.

Proizvod matrice susjedstva sa samom sobom ukazuje na sve putanje dužine 2 u posmatranom grafu. Posmatrajmo $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$. Element matrice $\mathbf{A}^2$ u i-toj vrsti i j-toj koloni obilježimo sa a_{ij}^2. Vodite računa da dvojka u navedenoj oznaci ne označava kvadriranje. Iz definicije matričnog množenja imamo da je

$$a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} a_{kj}$$

Podsjetimo se da elementi a_{ik} mogu biti samo 0 ili 1. Dakle, ako je $a_{ij}^2 = 0$, tada je $a_{ik}a_{kj} = 0$ za svako k a to znači da ne postoje dvije nadovezane grane (putanja dužine 2) koje povezuju čvorove i i j. Ukoliko je $a_{ij}^2 > 0$ tada postoji bar jedno $k = k_1$ takvo da je $a_{ik_1}a_{k_1j} = 1$ odnosno $a_{ik_1} = 1$ i $a_{k_1j} = 1$. Dakle, u ovom slučaju postoji grana od čvora i do čvora k_1 i grana od čvora k_1 do čvora j i te dvije grane čine putanju dužine 2. Uočite da može postojati više različitih putanja dužine 2 među posmatranim čvorovima, svaka od njih dodaje jedinicu u element a_{ij}^2, pa pored podatka o postojanju putanje dužine 2 dobijamo informaciju i o njihovom broju.

Na sličan način, može se pokazati da matrica $\mathbf{A}^n$ opisuje sve moguće putanje dužine n u posmatranom grafu. i da je a_{ij}^n broj različitih putanja dužine n od čvora i do čvora j. Dokaz ove tvrdnje možemo izvesti matematičkom indukcijom. Za bazu indukcije možemo uzeti sulučaj $n = 1$, koji je trivijalan jer putanje dužine 1 predstavljaju pojedinačne grane grafa a matrica **A** upravo njih opisuje. U indukcijskom koraku pretpostavljamo da elementi matrice $\mathbf{A}^n$ predstavljaju broj putanja dužine n, a trebamo dokazati da elementi matrice $\mathbf{A}^{n+1}$ predstavljaju broj putanja dužine $n+1$

u posmatranom grafu:

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{A}$$

$$a_{ij}^{n+1} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}^n a_{kj}$$

Ako je za neko k element $a_{kj} = 1$ tada postoji grana od čvora k do čvora j i sve putanje dužine n od čvora i do čvora k se mogu produžiti sa tom granom dajući a_{ik}^n putanja dužine $n+1$. Dakle a_{ij}^{n+1} predstavlja ukupan broj različitih putanja dužine $n+1$ u posmatranom grafu, što je i trebalo dokazati.

Teorema: U povezanom neorjentisanom grafu sa n čvorova između svaka dva čvora postoji putanja grafa ne duža od $n-1$. Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da postoje dva čvora i i j takva da je najkraća putanja između njih duža od n. Označimo dućinu putanje sa l. Zapišimo putanju kao niz čvorova:

$$c_0 = i, c_1, c_2, \ldots, c_{l-1}, c_l = j$$

posmatrani niz ima $l+1$ elemenat. Ako je $l \geq n$ tada se bar jedan čvor javlja dva puta u putanji, odnosno postoje p i q takvi da je $c_p = c_q = c$. Neka je $p < q$. Sada putanju možemo da zapišemo kao

$$i = c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}, c_p = c, c_{p+1}, \ldots, c_{q-1}, c_q = c, c_{q+1}, \ldots, c_{l-1}, c_l = j$$

Ova putanja se može skratiti tako što eliminišemo njen ciklični dio

$$c_p = c, c_{p+1}, \ldots, c_{q-1}, c_q = c$$

tako da dobijamo kraću putanju

$$i = c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}, c_p, c_{q+1}, \ldots, c_{l-1}, c_l = j$$

što znači da posmatrana putanja nije najkraća moguća. Znači ako pretpostavimo da je najkraća putanja duža od $n-1$ dolazimo do zaključka da se ona može skratiti što ukazuje na to da je naša pretpostavka netačna. Ovim je teorema dokazana.

Teorema: U povezanom orjentisanom grafu za proizvoljna dva čvora i i j postoji putanja ne duža od $n-1$ od čvora i do čvora j ili od čvora j do čvora i. Dokaz ove teoreme može se provesti na sličan način kao i dokaz prethodne teoreme.

Dvije navedene teoreme omogućiće nam da definišemo jednostavan kriterijum kojim ćemo zaključiti da li je graf povezan ili nije. Naime, posmatrajmo zbir

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}$$

Elementi b_{ij} matrice $\mathbf{B}$ predstavljaju zbir svih mogućih putanja dužine $1,2,\dots,n-1$ od čvora i do čvora j. U povezanom grafu postoji bar jedna putanja ili od i do j ili od j do i, dakle, povezan graf će imati elemente matrice $\mathbf{B}$ takve da je za $i \neq j$ ili $b_{ij} > 0$ ili $b_{ji} > 0$. Znači ispitujući elemente matrice $\mathbf{B}$ dolazimo do informacije o povezanosti posmatranog grafa. Kriterijum možemo dodatno pojednostaviti ako posmatramo matricu

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{B}^T$$

gdje $\mathbf{B}^T$ označava transponovanu matricu $\mathbf{B}$. Graf je povezan ako $\mathbf{B}_1$ nema nultih elemenata van glavne dijagonale.

4.3 Izomorfizam grafova

Za dva grafa $G_1 = (V_1, B_1)$ i $G_2 = (V_2, B_2)$ kažemo da su **izomorfni** ukoliko postoji obostrano jednoznačno preslikavanje skupa čvorova prvog grafa V_1 na skup čvorova drugog grafa V_2 i ako se tim preslikavanjem skup grana B_1 obostrano jednoznačno preslikava na skup grana B_2.

Uvedimo pojam permutacione matrice koja će se koristiti u provjeri izomorfnosti grafova. Permutaciona matrica $\mathbf{P}$ je matrica koja se sastoji od nula i jedinica, tako da u svakoj vrsti i u svakoj koloni ima tačno jednu jedinicu. Permutaciona matrica ima osobinu da je $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}$ jednako jediničnoj matrici.

Ukoliko su dva grafa izomorfna tada postoji permutaciona matrica $\mathbf{P}$ takva da je

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{P}$$

gdje je $\mathbf{A}_1$ matrica susjedstva prvog grafa a $\mathbf{A}_2$ matrica susjedstva drugog grafa.

Koristeći se teorijom sopstvenih vrijednosti i sopstvenih vektora matrice može se definisati način za utvrđivanje egzistencije matrice $\mathbf{P}$ i za njeno određivanje. Navedena teorija prevazilazi sadržaj ovog kursa i neće biti prezentovana.

4.4 Euler-ove i Hamilton-ove putanje

Euler-ova putanja je putanja koja prolazi svakom granom grafa tačno jedan put. Zatvorena Euler-ova putanja je Euler-ov ciklus. Graf može a ne mora imati Euler-ovu putanju, odnosno ciklus.

Hamiltonova putanja (ciklus) je putanja (odnosno ciklus) koja prolazi svakim čvorom grafa tačno jedan put.

Svakom čvoru neorjentisanog grafa možemo pridružiti podatak o broju grana koje sadrže taj čvor. Ta veličina se naziva **stepen čvora**. Ukoliko se radi o orjentisanom grafu možemo govoriti o ulaznom stepenu čvora (broj grana koje se završavaju u posmatranom čvoru), izlaznom stepenu čvora (broj grana koje počinju u posmatranom čvoru) i o ukupnom stepenu čvora koji se može različito definisati: kao zbir ili kao razlika ulaznog i izlaznog stepena, u zavisnosti od konkretne prirode čvorova i grana grafa. Ako drugačije nije naglašeno pod ukupnim stepenom čvora (ili samo stepenom čvora) orjentisanog grafa smatraćemo zbir izlaznog i ulaznog stepena čvora.

Razmatrajmo sada problem utvrđivanja egzistencije Euler-ove putanje u datom grafu. Euler-ova putanja je putanja koja prolazi svakom granom grafa tačno jedan put. Ukoliko u povezanom grafu (ili multigrafu) imamo 0 ili 2 čvora neparnog stepena tada graf posjeduje Euler-ovu putanju. U prvom slučaju, kada se radi o grafu bez čvorova neparnog stepena, Euler-ova putanja je zatvorena odnosno predstavlja Euler-ov ciklus.

Analizirajmo parnost stepena čvorova proizvoljnog grafa. Svaka grana grafa uvećava za 1 stepene dva čvora (polaznog i krajnjeg) tako da je ukupan broj čvorova sa neparnim stepenom uvijek paran. Dokaz ove tvrdnje možemo izvesti matematičkom indukcijom po broju grana posmatranog grafa:

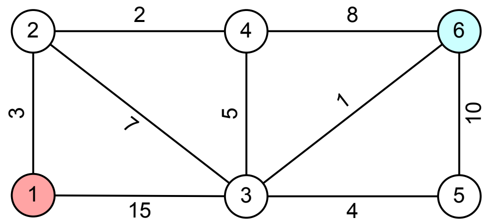
I korak: ako je broj grana u grafu jednak 0 tada su stepeni svih čvorova jednaki nuli, dakle čvorova sa neparnim stepenom ima 0 a to je paran broj.

II korak: pretpostavimo da u grafu sa n grana imamo paran broj čvorova sa neparnim stepenom. Označimo taj broj sa $k_{nep}(n)$. Dokažimo da dodavanjem $n+1$ grane broj čvorova sa neparnim stepenom ostaje paran. Posmatrajmo tri moguća slučaja:

- Dodata grana povezuje dva čvora sa koji su prethodno imali paran stepen. Stepen i jednog i drugog čvora se uvećava za 1 tako da oba čvora postaju čvorovi sa neparnim stepenom u novom grafu pa je $k_{nep}(n+1) = k_{nep}(n)+2$. Kako je po pretpostavci $k_{nep}(n)$ parno očigledno je i $k_{nep}(n+1)$ paran broj.

- Dodata grana povezuje dva čvora sa koji su prethodno imali neparan stepen. Stepen i jednog i drugog čvora se uvećava za 1 tako da oba čvora postaju čvorovi sa parnim stepenom u novom grafu pa je $k_{nep}(n+1) = k_{nep}(n)-2$. Kako je po pretpostavci $k_{nep}(n)$ parno očigledno je i $k_{nep}(n+1)$ paran broj.

- Dodata grana povezuje čvor koji je u ranije imao paran i čvor koji je ranije imao neparan stepen. Stepen prvog čvora se uvećava za 1 i postaje neparan dok se stepen drugog čvora uvećava za 1 i postaje paran. Dakle u ovom slučaju broj čvorova sa neparnim stepenom ostaje nepromijenjen $k_{nep}(n+1) = k_{nep}(n)$ i po indukcijskoj pretpostavci paran.



Slika 3: Primjer težinskog grafa. Pored svake grane je upisan maksimalni protok po toj grani.

Svi mogući slučajevi su razmatrani i u svakom slučaju je $k_{nep}(n+1)$ paran broj čime je dokaz završen.

Obilaskom grafa po Euler-ovoj putanji kroz svaki čvor možemo proći više puta. Svaki prolaz kroz čvor zahtijeva dvije grane: granu kojom smo došli i granu kojom napuštamo čvor. Dakle stepeni svih čvorova Euler-ove putanje, izuzimajući početni i krajnji moraju biti parni. Početak putanje zahtijeva samo odlaznu granu, dakle to može biti čvor sa neparnim stepenom. Isti zaključak možemo izvesti i za kraj Euler-ove putanje. Kako putanja ima samo jedan početak i jedan kraj, to moramo imati dva čvora sa neparnim stepenom. Ukoliko je putanja ciklus, početni i krajnji čvor se podudaraju, tako da je stepen tog čvora paran (od njega smo krenuli i u njega se na kraju vraćamo). U ovom slučaju u grafu ne može postojati nijedan čvor sa neparnim stepenom.

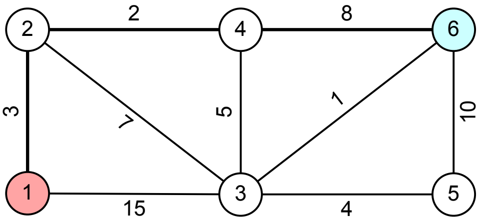
4.5 Algoritam za određivanje maksimalnog protoka

Posmatrajmo graf kod kojeg je svakoj grani pridružena težina. Neka težina grane ima fizički smisao maksimalnog protoka kroz posmatranu granu. Protok se može posmatrati kao protok nekog fluida (na primjer vode — tada graf predstavlja vodovodnu mrežu) ili protok informacija (izražen u Mb/s — tada graf predstavlja komunikacionu mrežu).

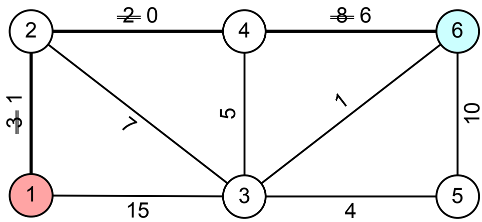
Postavlja se problem određivanja maksimalnog protoka između dva čvora grafa uz potpuno iskorišćenje svih mogućih načina za uspostavljanje protoka od početnog do krajnjeg čvora.

U nastavku će biti opisan jedan od algoritama za određivanje maksimalnog protoka. Navedeni algoritam je pojednostavljena verzija Ford-Fulkersonovog algoritma za maksimizaciju protoka. Algoritam će biti objašnjen na primjeru grafa sa slike 3.

Posmatrajmo problem određivanja maksimalnog protoka od čvora 1 do čvora 6 u navedenom grafu.



Slika 4: Prva analizirana putanja 1–2–4–6 sa maksimalnim protokom 2



Slika 5: Korigovane težine grana

Pronađimo jednu putanju od čvora 1 do čvora 6. Neka je to putanja 1–2–4–6. Putanja je prikazana podebljanom linijom na slici 4. Posmatrajmo sada težine grana koje čine pitanju. Te težine su: 3, 2 i 8. Najmanja težina je 2 a to znači da posmatranom putanjom možemo ostvariti protok intenziteta 2.

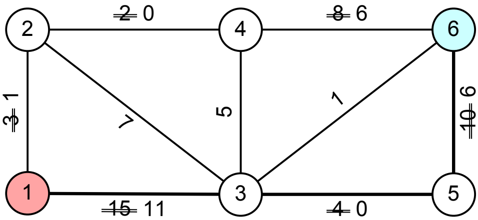
Sada korigujmo težine grana koje čine putanju tako što sve težine umanjimo za vrijednost protoka po posmatranoj putanji, odnosno u navedenom primjeru za 2. Nove težine su prikazane na slici 5. Stare težine su precrtane dvostrukom linijom.

Potražimo sada novu putanju od čvora 1 do čvora 6, vodeći računa da putanja ne smije prolaziti granom čija je težina 0 (u posmatranom primjeru grana 2—4). Neka je to putanja 1–3–5–6. Grane putanje imaju težine 15, 4 i 10. Najmanja težina je 4 što znači da ovom putanjom možemo ostvariti protok intenziteta 4. Korigujmo težine grana posmatrane putanje oduzimajući 4 od postojećih težina i dobićemo graf prikazan na slici 6.

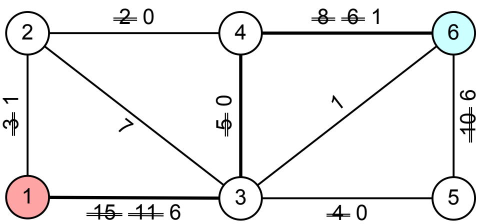
Naredna putanja neka bude putanja 1–3–4–6 sa minimalnom težinom 5. Graf nakon korekcije težina za ovu putanju je prikazan na slici 7.

Sledeća putanja je 1–2–3–6 (uočite da smo mogli izabrati i putanju 1–3–6). Minimalna težina je 1 a graf nakon korekcije težina je prikazan na slici 8.

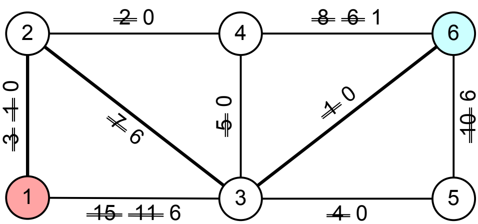
U dobijenom grafu ne postoji mogućnost formiranja putanja od 1 do 6



Slika 6: Druga putanja sa maksimalnim protokom 4



Slika 7: Treća putanja sa maksimalnim protokom 5



Slika 8: Četvrta putanja sa maksimalnim protokom 1

takvih da sve grane putanje imaju težinu različitu od nule. To znači da smo iscrpili sve mogućnosti da povežemo čvor 1 sa čvorom 6. Ukupan protok dobijamo tako što saberemo protoke po svim odabranim putanjama:

Putanja	Protok
1–2–4–6	2
1–3–5–6	4
1–3–4–6	5
1–2–3–6	1
Ukupno:	12

Dakle, u posmatranom primjeru moguće je ostvariti protok intenziteta 12 od čvora 1 do čvora 6.

4.6 Zadaci

1. Izvedite formulu za broj grana kompletnog bipartitnog grafa u opštem slučaju (za proizvoljno m i n).

5 Generatorske funkcije

Neka je g_n niz brojeva definisan za $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ukoliko se kao indeks niza pojavi negativan broj smatraćemo da je $g_n = 0$ za $n < 0$. Na taj način je niz g_n definisan za svaki cijeli broj n.

Generatorska funkcija niza g_n je funkcija $G(z)$ definisana sa:

$$G(z) = \sum_n g_n K_n(z) \tag{24}$$

gdje je sa $K_n(z)$ označeno jegro generatorske funkcije. Uočite da jezgro ne zavisi od posmatranog niza g_n. U navedenoj sumi nijesu navedene granice. Podrazumijeva se da se sabiranje izvodi po svim prirodnim brojevima. Kako je $g_n = 0$ za $n < 0$ to možemo smatrati da se u prethodnoj sumi sabiranje izvodi po svim cijelim brojevima.

Posmatrajmo niz g_n koji se može izraziti u obliku linearne kombinacije nizova x_n i y_n, odnosno neka je

$$g_n = a x_n + b y_n$$

gdje su a i b proizvoljne konstante. Generatorska funkcija niza g_n će biti:

$$\begin{aligned}
G(z) = \sum_n g_n K_n(z) &= \sum_n (a x_n + b y_n) K_n(z) = \\
&= a \sum_n x_n K_n(z) + b \sum_n y_n K_n(z) = \\
&= a X(z) + b Y(z)
\end{aligned}$$

gdje je $X(z)$ generatorska funkcija niza x_n, a $Y(z)$ generatorska funkcija niza y_n. Zaključujemo da su generatorske funkcije linearne u odnosu na posmatrani niz g_n.

U prethodnim primjerima podrazumijeva se da sve navedene sume konvergiraju bar za neke vrijednosti z. Skup svih vrijednosti z gdje generatorska funkcija konvergira naziva se oblast konvergencije generatorske funkcije $G(z)$.

S obzirom da od generatorske funkcije očekujemo da u potpunosti opisuje posmatrani niz g_n, to od nje očekujemo da ispunjava uslove jedinstvenosti:

- Jedan niz g_n ima samo jednu i samo jednu generatorsku funkciju $G(z)$.

- Jedna generatorska funkcija $G(z)$ odgovara jednom i samo jednom nizu g_n.

Prvi zahtjev je očigledno ispunjen jer je

$$G(z) = \sum_n g_n K_n(z)$$

Drugi zahtjev nameće ograničenja na jezgro $K_n(z)$. Pretpostavimo da nizovi x_n i y_n imaju generatorske funkcije $X(z)$ i $Y(z)$. Neka je $X(z) = Y(z)$. Tada je:

$$\sum_n x_n K_n(z) = \sum_n y_n K_n(z)$$

$$\sum_n x_n K_n(z) - \sum_n y_n K_n(z) = 0$$

$$\sum_n (x_n - y_n) K_n(z) = 0$$

Označimo sa $p_n = x_n - y_n$. Dobijamo:

$$\sum_n p_n K_n(z) = 0$$

Ova jednačina ima očigledno rješenje $p_n = 0$. Ukoliko je to jedini niz koji zadovoljava gornju jednačinu tada je drugi zahtjev ispunjen, odnosno ne mogu postojati dva različita niza x_n i y_n koji imaju istu generatorsku funkciju.

Jezgro generatorske funkcije može biti:

- $K_n(z) = z^n$, tada govorimo o standardnim generatorskim funkcijama koje nalaze primjenu u matematici i računarskim naukama,
- $K_n(z) = z^{-n}$, ovaj oblik generatorske funkcije često se koristi u elektrotehnici i obradi signala pod nazivom „z-transformacija”
- $K_n(z) = e^{-jzn}$, ovaj oblik generatorske funkcije koristi se u digitalnoj obradi signala pod nazivom „Diskretna Furijeova transformacija” (umjesto oznake z koristi se oznaka ω)
- $K_n(z) = \frac{z^n}{n!}$, kada govorimo o eksponencijalnim generatorskim funkcijama.

U nastavku ćemo se baviti standardnim generatorskim funkcijama sa jezgrom $K_n(z) = z^n$. Generatorska funkcija niza g_n je tada

$$G(z) = \sum_n g_n z^n = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + g_4 z^4 + \dots$$

Ovako definisana generatorska funkcija predstavlja stepeni red po varijabli z. Poznato je da stepeni redovi imaju oblast konvergencije definisanu sa $|z| < R$ gdje je R poluprečnik konvergencije. Generatorske funkcije se mogu posmatrati i kao formalni stepeni redovi kada pitanje konvergencije nije od interesa.

Primjer 5.1:

Odrediti generatorsku funkciju niza g_n definisanog sa $g_n = 0$ za $n > 5$ i tabelom:

n	0	1	2	3	4	5
g_n	1	2	1	1	2	1

Rješenje:

Po definiciji je:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_n g_n z^n = 1 + 2z + z^2 + z^3 + 2z^4 + z^5 = \\ &= (1 + 2z + z^2) + z^3(1 + 2z + z^2) = \\ &= (1 + z^3)(1 + 2z + z^2) = (1 + z^3)(1 + z)^2 \end{aligned}$$

Primjer 5.2:

Generatorska funkcija niza f_n je $F(z) = (1+z)(1-z)^3$. Odrediti vrijednosti elemenata niza f_n.

Rješenje:

Napišimo $F(z)$ u obliku:

$$\begin{aligned} F(z) &= (1+z)(1-z)^3 = (1+z)(1 - 3z + 3z^2 - z^3) = \\ &= 1 - 3z + 3z^2 - z^3 + z - 3z^2 + 3z^3 - z^4 = \\ &= 1 - 2z + z^3 - z^4 \end{aligned}$$

Uporedimo dobijeni izraz sa definicijom generatorske funkcije

$$F(z) = \sum_n f_n z^n = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + f_4 z^4 + f_5 z^5 \ldots$$

Zaključujemo da je:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= -2 \\ f_3 &= 1 \\ f_4 &= -1 \end{aligned}$$

i da je $f_n = 0$ za sve ostale vrijednosti n.

Primjer 5.3:

Odredimo generatorsku funkciju niza $u_n = 1$ za $n \geq 0$. Ovaj niz ćemo dosta koristiti u radu sa generatorskim funkcijama, stoga bi bilo zgodno upamtiti njegovu generatorsku funkciju.

Rješenje:

Potrebno je da pronađemo sumu:

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_n x_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \\ &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \end{aligned}$$

Uočite da je:

$$\begin{aligned} zU(z) &= z(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \\ &= z + z^2 + z^3 + z^4 \dots = U(z) - 1 \end{aligned}$$

odakle dobijamo:

$$zU(z) = U(z) - 1$$

odnosno:

$$U(z) = \frac{1}{1-z}$$

Primjer 5.4:

Odredimo generatorsku funkciju niza $\delta_n = 1$ za $n = 0$ i $\delta_n = 0$ za $n \neq 0$. Ovaj niz se naziva Dirakov niz. Koristićemo ga na više mjesta u radu sa generatorskim funkcijama, stoga bi bilo zgodno upamtiti njegovu generatorsku funkciju.

Rješenje:

Imamo da je

$$\Delta(z) = \sum_n \delta_n z^n = 1 \cdot z^0 = 1$$

5.1 Osobine generatorskih funkcija

U nastavku će biti navedene osnovne osobine generatorskih funkcija. Prva osobina, linearnost, dokazana je u opštem slučaju u prethodnom izlaganju.

1. Linearnost: Ako su $X(z)$, $Y(z)$ i $G(z)$ generatorske funkcije nizova x_n, y_n i g_n i ako je $g_n = ax_n + by_n$ gdje su a i b proizvoljne konstante tada je
$$G(z) = aX(z) + bY(z)$$

2. Pomjeranje niza u desno: Neka je niz $g_n = x_{n-M}$ gdje je $M > 0$. Uočite da su $g_0, g_1, \ldots, g_{M-1}$ jednaki nuli. Tada je
$$G(z) = z^M X(z)$$

3. Pomjeranje niza u lijevo: Neka je niz $g_n = x_{n+M}$ za $n \geq 0$ gdje je $M > 0$. Uočite da se u nizu g_n ne pojavljuju članovi niza x: $x_0, x_1, \ldots, x_{M-1}$. Tada je:
$$G(z) = \frac{X(z) - \sum_{n=0}^{M-1} x_n z^n}{z^M}$$

4. Množenje eksponencijalnim nizom: Neka je $g_n = c^n x_n$, gdje je c proizvoljna konstanta. Tada je
$$G(z) = X(cz)$$

5. Izvod generatorske funkcije: Neka je $g_n = n \cdot x_n$. Tada je
$$G(z) = zX'(z)$$
gdje je sa $X'(z)$ označen izvod generatorske funkcije $X(z)$ po varijabli z.

6. Integral generatorske funkcije: Neka je $g_n = x_{n-1}/n$ za $n > 0$ i $g_0 = 0$. Tada je
$$G(z) = \int_0^z X(z)dz$$

7. Množenje generatorskih funkcija: Ako je
$$g_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$
Tada je:
$$G(z) = X(z)Y(z)$$

Dokažimo navedene osobine:

1. Linearnost:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_n g_n z^n = \sum_n (a x_n + b y_n) z^n = \\
&= \sum_n a x_n z^n + \sum_n b y_n z^n = \\
&= a \sum_n x_n z^n + b \sum_n y_n z^n = aX(z) + bY(z)
\end{aligned}
$$

2. Pomjeranje niza u desno:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_n g_n z^n = \sum_{n=M}^{\infty} g_n z^n = \\
&= \sum_{n=M}^{\infty} x_{n-M} z^n = \left\{ \begin{array}{l} \text{smjena } n \text{ sa } m \\ m = n - M \Longrightarrow n = m + M \end{array} \right\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} x_m z^{m+M} = \sum_{m=0}^{\infty} x_m z^m z^M = z^M \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \\
&= z^M \sum_n x_n z^n = z^M X(z)
\end{aligned}
$$

3. Pomjeranje niza u lijevo:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \sum_n g_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+M} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+M} z^n + \sum_{n=-M}^{-1} x_{n+M} z^n - \sum_{n=-M}^{-1} x_{n+M} z^n = \\
&= \sum_{n=-M}^{\infty} x_{n+M} z^n - \sum_{n=-M}^{-1} x_{n+M} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{n-M} - \sum_{n=0}^{M-1} x_n z^{n-M} = \\
&= z^{-M} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n - \sum_{n=0}^{M-1} x_n z^n \right) = \frac{X(z) - \sum_{n=0}^{M-1} x_n z^n}{z^M}
\end{aligned}
$$

4. Množenje eksponencijalnim nizom:

$$
G(z) = \sum_n g_n z^n = \sum_n c^n x_n z^n = \sum_n x_n (cz)^n = X(cz)
$$

5. Izvod generatorske funkcije:

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_n x_n z^n \\
X'(z) &= \sum_n n x_n z^{n-1} = \frac{1}{z} \sum_n n x_n z^n \\
zX'(z) &= \sum_n n x_n z^n = \sum_n g_n z^n = G(z)
\end{aligned}
$$

6. Integral generatorske funkcije:

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_n x_n z^n \\
\int_0^z X(z)dz &= \sum_n x_n \int_0^z z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{1}{n+1} z^{n+1} = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{smjena } n \text{ sa } m \\ m = n+1 \Longrightarrow n = m-1 \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} x_{m-1} \frac{1}{m} z^m = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n-1}}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n - g_0 = \\
&= G(z) - g_0 = G(z)
\end{aligned}
$$

7. Množenje generatorskih funkcija:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= X(z)Y(z) = \\
&= (x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + x_3 z^3 + \ldots)(y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + y_3 z^3 + \ldots) = \\
&= x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0)z + (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0)z^2 + \\
&+ (x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0)z^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Odakle mođemo zaključiti da je:

$$
\begin{aligned}
g_0 &= x_0 y_0 \\
g_1 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\
g_2 &= x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 \\
g_3 &= x_0 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0 \\
&\vdots \\
g_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}
\end{aligned}
$$

Dokaz osobine množenja generatorskih funkcija možemo izvesti i na sledeći način. Posmatrajmo izraz

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

Uočite da je izraz pod sumom jednak nuli za $k < 0$ (jer je tada $x_k = 0$) odnosno za $k > n$ (jer je tada $y_{n-k} = 0$). Uvažavajući ove činjenice možemo proširiti granice sumiranja na čitav skup cijelih brojeva

$$g_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}$$

Uočite takođe da je $g_n = 0$ za svako $n < 0$, jer je tada ili $x_k = 0$ ili je $y_{n-k} = 0$. Dakle, generatorska funkcija niza g_n je

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} z^n$$

Uvedimo sada umjesto varijable n novu varijablu m smjenom $n-k=m$. Kada n uzima vrijednosti iz skupa cijalih brojeva tada i m takođe uzima sve vrijednosti iz skupa cijelih brojeva. Sada je:

$$G(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_m z^{k+m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^k y_m z^m =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^k \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m z^m = X(z)Y(z)$$

što je i trebalo dokazati.

5.2 Određivanje generatorske funkcije datog niza

Pretpostavimo da je niz dat u zatvorenoj formi. Uzmimo za primjer nizove:

$$x_n = 3^n + 4$$
$$y_n = \begin{cases} 4 & \text{za} \quad n = 0 \\ 3 \cdot 2^n & \text{za} \quad n > 0 \end{cases}$$

Određivanje generatorske funkcije možemo provesti na više načina. Prvi način je direktno izračunavanje po definiciji generatorske funkcije. Za posmatrane primjere imaćemo:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3^n + 4) z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4 \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Iskoristimo sada poznatu formulu za beskonačnu geometrijsku progresiju (koja u numeričkom smislu vrijedi za $|q| < 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

dobijamo:

$$X(z) = \frac{1}{1-3z} + 4\frac{1}{1-z} = \frac{1-z+4(1-3z)}{(1-3z)(1-z)} =$$
$$= \frac{5-13z}{(1-3z)(1-z)} = \frac{5-13z}{1-4z+3z^2}$$

U slučaju niza y_n imamo:

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n = y_0 z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n z^n =$$
$$= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 2^n z^n = 4 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} (2z)^n =$$
$$= 4 + 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n - 1\right) = 4 + 3\left(\frac{1}{1-2z} - 1\right) =$$
$$= 4 + 3\frac{1-1+2z}{1-2z} = 4 + \frac{6z}{1-2z} = \frac{4-8z+6z}{1-2z} = \frac{4-2z}{1-2z}$$

Problemu određivanja generatorskih funkcija možemo pristupiti i na drugi način, tako da iskoristimo neke poznate osobine generatorskih funkcija navedene u prethodnom poglavlju. Za slučaj niza x_n imamo da se on sastoji od zbira dva niza

$$x_n = 3^n + 4 = p_n + q_n$$

gdje je $p_n = 3^n$ i $q_n = 4$. Koristeći se osobinom 1 (linearnost generatorske funkcije) možemo zaključiti da će generatorska funkcija niza x_n biti jednaka zbiru generatorskih funkcija nizova p_n i q_n. Ovim zaključivanjem smo polazni problem sveli na dva jednostavnija problema.

Niz p_n može da se napiše u obliku: $p_n = 3^n \cdot 1$. Sada možemo da iskoristimo osobinu 4 (množenje eksponencijalnim nizom, gdje je u konkretnom primjeru $c = 3$). Dakle ako znamo generatorsku funkciju niza $u_n = 1$ tada možemo lako naći i $P(z)$. Niz u_n smatraćemo elementarnim nizom. Njegova generatorska funkcija je:

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^n = \frac{1}{1-z}$$

Sada je

$$P(z) = U(3z) = \frac{1}{1-3z}$$

Niz q_n predstavimo u obliku $q_n = 4 \cdot 1 = 4 \cdot u_n$. Koristeći se linearnošću generatorskih funkcija dobijamo

$$Q(z) = 4U(z) = \frac{4}{1-z}$$

Sada je konačno:

$$X(z) = P(z) + Q(z) = \frac{1}{1-3z} + \frac{4}{1-z} =$$
$$= \frac{5-13z}{(1-3z)(1-z)} = \frac{5-13z}{1-4z+3z^2}$$

Posmatrajmo sada niz y_n.

$$y_n = \begin{cases} 4 & \text{za} \quad n = 0 \\ 3 \cdot 2^n & \text{za} \quad n > 0 \end{cases}$$

Iz definicije je jasno da je niz definisan različitim formulama za razne vrijednosti indeksa n. Formula

$$y_n = 3 \cdot 2^n$$

vrijedi za svako n osim za $n = 0$ kada daje pogrešan rezultat $3 \cdot 2^0 = 3 \neq y_0 = 4$. Formula, dakle, zahtijeva korekciju tako što za $n = 0$ treba dodati vrijednost 1. Podsjetimo se da niz δ_n ima osobinu da je jednak 0 za svako n, osim za $n = 0$ kada je $\delta_0 = 1$. Sada možemo pisati:

$$y_n = 3 \cdot 2^n + \delta_n$$

i dobijamo jednu formulu validnu za svako n. Znajući da je:

$$1 \longmapsto \frac{1}{1-z}$$

gdje $\longmapsto$ označava da nizu sa lijeve strane odgovara generatorska funkcija navedena na desnoj strani dobijamo:

$$2^n \cdot 1 \longmapsto \frac{1}{1-2z}$$

primjenom osobine množenja eksponencijalnim nizom, a zatim korišćenjem linearnosti:

$$3 \cdot 2^n \cdot 1 \longmapsto \frac{3}{1-2z}$$

Poznato je i:

$$\delta_n \longmapsto 1$$

tako da je sada korišćenjem linearnosti:

$$Y(z) = \frac{3}{1-2z} + 1 = \frac{3+1-2z}{1-2z} = \frac{4-2z}{1-2z}$$

Analizi niza y_n mogli smo pristupiti i na drugačiji način. Niz y_n posmatrajmo kao zbir niza koji je samo za $n = 0$ jednak 4 a za sve ostale vrijednosti jednak nuli i niza koji je jednak nuli za $n = 0$ i za sve ostale vrijednosti n jednak $3 \cdot 2^n$. Prvi niz se može napisati kao $4\delta_n$ a drugi niz je nastao pomjeranjem niza $r_n = 3 \cdot 2^{n+1}$ u desno za 1. Sada je:

$$r_n = 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 2 \cdot 2^n = 6 \cdot 2^n \cdot 1$$

Polazeći od:

$$1 \longmapsto \frac{1}{1-z}$$

dobijamo:

$$2^n \cdot 1 \longmapsto \frac{1}{1-2z}$$
$$r_n = 6 \cdot 2^n \cdot 1 \longmapsto \frac{6}{1-2z} = R(z)$$

a takođe i:

$$\delta_n \longmapsto 1$$
$$4\delta_n \longmapsto 4$$

Niz y_n je jednak:

$$y_n = 4\delta_n + r_{n-1}$$

pa je

$$Y(z) = 4 + zR(z)$$

gdje je iskorišćena osobina linearnosti i osobina pomjeranja niza u desno.
Konačno je:

$$Y(z) = 4 + \frac{6z}{1-2z} = \frac{4-8z+6z}{1-2z} = \frac{4-2z}{1-2z}$$

Posmatrajmo sada niz

$$g_n = n^2$$

i pronađimo njegovu generatorsku funkciju.

Pođimo od:

$$1 \longmapsto \frac{1}{1-z}$$

iskoristimo osobinu izvoda generatorske funkcije:

$$n \cdot 1 \longmapsto z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = z\frac{1}{(1-z)^2}$$
$$n \cdot n \cdot 1 \longmapsto z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) = z\frac{(1-z)^2 + 2z(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

na osnovu navedenoga je:

$$G(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

5.3 Određivanje vrijednosti niza na osnovu zadate generatorske funkcije

Neka je $G(z)$ generatorska funkcija niza g_n. Ukoliko uspijemo da je napišemo u obliku stepenog reda:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n$$

gdje su G_n koeficijenti stepenog reda, tada poređenjem sa definicijom generatorske funkcije možemo zaključiti da su članovi niza g_n jednaki koeficijentima G_n.

Posmatrajmo primjer gdje je $G(z) = (1-z)(1+z)(1+3z^2)$. Oslobađanjem zagrada dobijamo:

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^2)(1+3z^2) = 1 - z^2 + 3z^2 - 3z^4 = \\ &= 1 + 2z^2 - 3z^4 \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je $g_0 = 1$, $g_2 = 2$, i $g_4 = -3$, dok je $g_n = 0$ u svim preostalim slučajevima. Naš niz g_n ima konačno mnogo članova različitih od nule pa se efikasno može predstaviti tabelom

n	0	1	2	3	4
g_n	1	0	2	0	-3

Podrazumijevamo da su sve vrijednosti g_n koje nijesu navedene u tabeli jednake nuli.

Posmatrajmo sada generatorsku funkciju oblika:

$$G(z) = \frac{a}{1-cz}$$

gdje su a i c proizvoljne konstante. Znamo da je:

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \frac{1}{1-z} \\ c^n \cdot 1 &\longmapsto \frac{1}{1-cz} \\ a \cdot c^n &\longmapsto \frac{a}{1-cz} \end{aligned}$$

Dakle, posmatranoj generatorskoj funkciji odgovara niz

$$g_n = a \cdot c^n$$

Primjer 5.5:

Odredimo niz g_n ako je

$$G(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{5}{1-2z}$$

Rješenje:

Analogno prethodno analiziranom opštem slučaju imamo da je:

$$1 \longmapsto \frac{1}{1-z}$$
$$(-1)^n \cdot 1 \longmapsto \frac{1}{1-(-1)z} = \frac{1}{1+z}$$

a takođe i:

$$1 \longmapsto \frac{1}{1-z}$$
$$2^n \cdot 1 \longmapsto \frac{1}{1-2z}$$
$$5 \cdot 2^n \cdot 1 \longmapsto \frac{5}{1-2z}$$

Dakle, prvi sabirak je generatorska funkcija niza $(-1)^n$ a drugi sabirak je generatorska funkcija niza $5 \cdot 2^n$. Koristeći se osobinom linearnosti zaključujemo da je:

$$g_n = (-1)^n + 5 \cdot 2^n$$

Neka je sada funkcija $G(z)$ data u obliku količnika dva polinoma po z:

$$G(z) = \frac{P_N(z)}{Q_M(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \cdots + p_{N-1} z^{N-1} + p_N z^N}{q_0 + q_1 z + \cdots + q_{M-1} z^{M-1} + z^M}$$

gdje je $P_N(z)$ polinom stepena N i $Q_M(z)$ polinom stepena M. Takođe smatrajmo da je koeficijent uz najveći stepen polinoma $Q_M(z)$ jednak 1 i da je $N < M$. Polinom $Q_M(z)$ ima M nula $z_1, z_2, \ldots z_M$ i može se napisati u obliku:

$$Q_M(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_M)$$

Generatorska funkcija $G(z)$ se, pod uslovom da su sve nule $z_1, z_2, \ldots z_M$ međusobno različite, može napisati u obliku:

$$G(z) = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_1}{z - z_2} + \cdots + \frac{A_M}{z - z_M}$$

Gdje su $A_1, A_2, \ldots, A_M$ konstante koje treba pronaći. Uočite da se svi sabirci u navedenom izrazu svode na prethodno analizirani slučaj generatorske funkcije. Ovaj zapis funkcije $G(z)$ u matemetici se naziva razvoj funkcije na parcijalne razlomke.

Na osnovu prethodne tvrdnje lako se može pokazati da se $G(z)$ oblika

$$G(z) = \frac{P_N}{(a_1 + b_1 z)(a_2 + b_2 z)\ldots(a_M + b_M z)}$$

u slučaju da su nule polinoma u imeniocu različite može napisati u obliku:

$$G(z) = \frac{A_1}{a_1 + b_1 z} + \frac{A_2}{a_2 + b_2 z} + \cdots + \frac{A_M}{a_M + b_M z}$$

Primjer 5.6:

Pronađimo niz čija je generatorska funkcija:

$$G(z) = \frac{1+z}{(1-2z)(1+3z)}$$

Rješenje:

Prvi polinom u imeniocu ima nulu $z_1 = \frac{1}{2}$ a drugi $z_2 = -\frac{1}{3}$. Kako su nule različite to možemo pisati:

$$G(z) = \frac{A_1}{1-2z} + \frac{A_2}{1+3z}$$

Pronađimo A_1 i A_2:

$$\begin{aligned}
\frac{1+z}{(1-2z)(1+3z)} &= \frac{A_1}{1-2z} + \frac{A_2}{1+3z} \\
\frac{1+z}{(1-2z)(1+3z)} &= \frac{A_1(1+3z) + A_2(1-2z)}{(1-2z)(1+3z)} \\
\frac{1+z}{(1-2z)(1+3z)} &= \frac{A_1 + A_2 + (3A_1 - 2A_2)z}{(1-2z)(1+3z)}
\end{aligned}$$

poslednji izraz je tačan samo ako je:

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= 1 \\
3A_1 - 2A_2 &= 1
\end{aligned}$$

jer koeficijenti polinoma u imeniocu na lijevoj strani moraju biti jednaki koeficijentima polinoma u imeniocu na desnoj strani. Rješavanjem dobijenog sistema dolazimo do:

$$A_1 = \frac{3}{5} \text{ i } A_2 = \frac{2}{5}$$

odnosno

$$G(z) = \frac{3}{5}\frac{1}{1-2z} + \frac{2}{5}\frac{1}{1+3z}$$

kako je:

$$1 \longmapsto \frac{1}{1-z}$$
$$2^n \longmapsto \frac{1}{1-2z}$$
$$(-3)^n \longmapsto \frac{1}{1+3z}$$

zaključujemo da je:

$$g_n = \frac{3}{5}2^n + \frac{2}{5}(-3)^n$$

Ako se u polinomu $Q_M(z)$ pojavljuju višestruke nule, neka je to na primjer nula z_1 i neka se ona javlja p puta, tada u razvoju funkcije $G(z)$ na parcijalne razlomke treba dodati članove

$$\frac{A_{11}}{z-z_1} + \frac{A_{12}}{(z-z_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1p}}{(z-z_1)^p}$$

Analizirajmo doprinos ovakvih sabiraka nizu g_n. Posmatrajmo primjer kada je

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Možemo pisati:

$$G(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z}$$

dakle, radi se o proizvodu generatorskih funkcija. Iskoristimo se osobinom proizvoda generatorskih funkcija i poznatom činjenicom da je

$$u_n = 1 \longmapsto \frac{1}{1-z}$$

Dobijamo:

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

5.4 Primjena u rješavanju rekurzivnih relacija

Posmatrajmo rekurzivno zadati niz:

$$\begin{aligned} c_n &= 2c_{n-1} + 2 \qquad \text{za } n \geq 1 \\ c_0 &= 1 \end{aligned}$$

i potražimo generatorsku funkciju posmatranog niza $C(z)$. Podrazumijevamo da je $c_n = 0$ za $n < 0$. Svedimo rekurzivnu definiciju niza na jednu relaciju koja vrijedi za svako n. Prva relacije vrijedi za svako $n \geq 1$. Posmatrajmo jedini preostali slučaj $n = 0$. Tada se prva relacija svodi na:

$$2c_{-1} + 2 = 2 \cdot 0 + 2 = 2$$

a trebali bi smo dobiti vrijednost 1. Rješenje je u korišćenju Dirakovog niza δ_n u cilju korekcije rekurzivne relecije u slučaju $n = 0$. Lako je provjeriti da relacije

$$c_n = 2c_{n-1} + 2 - \delta_n$$

vrijedi za svako n. Potražimo sada generatorsku funkciju niza na lijevoj i niza na desnoj strani. One očigledno moraju biti jednake jer se radi o istim nizovima.

$$C(z) = 2zC(z) + \frac{2}{1-z} - 1$$

gdje smo iskoristili osobinu ninearnosti i pomjeranja niza c_n za jedno mjesto u desno. Rješavanjem dobijene jednačine po $C(z)$ dobijamo:

$$\begin{aligned} C(z)(1-2z) &= \frac{2-1+z}{1-z} \\ C(z) &= \frac{1+z}{(1-2z)(1-z)} \end{aligned}$$

Sada možemo poznatim metodama doći do niza c_n:

$$C(z) = \frac{1+z}{(1-2z)(1-z)} = \frac{A}{1-2z} + \frac{B}{1-z} = \frac{A+B+(-A-2B)z}{(1-2z)(1-z)}$$

odakle je

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -A - 2B &= 1 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} A &= 3 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

pa je:

$$C(z) = \frac{3}{1-2z} + \frac{-2}{1-z}$$

Kako je sada:

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \frac{1}{1-z} \\ 2^n &\longmapsto \frac{1}{1-2z} \\ 3 \cdot 2^n &\longmapsto \frac{3}{1-2z} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \frac{1}{1-z} \\ -2 &\longmapsto \frac{-2}{1-z} \end{aligned}$$

dobijamo konačno:

$$c_n = 3 \cdot 2^n - 2$$

Na osnovu izloženog primjera možemo definisati proceduru za rješavanje rekurzivnih relacija primjenom generatorskih funkcija:

1. Posmatranu rekurzivnu relaciju trebamo svesti na jednu formulu koja, uz pretpostavku da su vrijednosti niza sa negativnim indeksima jednake nuli, mora vrijediti za svaki indeks n. U ovome će nam pomoći Dirakove funkcije δ_n (za korekciju vrijednosti za $n = 0$), δ_{n-1} (za korekciju vrijednosti za $n = 1$)...

2. Pronađemo generatorsku funkciju lijeve i desne strane dobijene relacije. Rezultat je algebarska relacija iz koje se jednostavno dobija generatorska funkcija rekurzivno definisanog niza.

3. Ukoliko su nam potrebne vrijednosti članova niza u zatvorenoj formi, odredimo niz koji odgovara generatorskoj funkciji dobijenoj u prethodnom koraku.

5.5 Zadaci

1. Odredite generatorsku funkciju $G(z)$ niza g_n čije su vrijednosti date u tabeli za $0 \le n \le 5$. Smatrajte da su ostale vrijednosti niza g_n jednake nuli.

n	0	1	2	3	4	5
g_n	1	5	5	−4	2	1

2. Niz x_n je za $n \geq 0$ definisan sa:

$$x_n = 4 \cdot 5^n + (-1)^n - 7n$$

Odredite njegovu generatorsku funkciju $X(z)$.

3. Odredite niz x_n ukoliko je njegova generatorska funkcija:

$$X(z) = \frac{5}{2+z} + \frac{3z}{(1+z)^2}$$

4. Poznata je generatorska funkcija niza x_n

$$X(z) = \frac{1+2z+3z^2}{2+z+z^3}$$

Odredite x_0, x_1 i x_2.

6 Osnove teorije vjerovatnoće

6.1 Kombinatorika

Permutacije sa ponavljanjem: Izbor k objekata iz skupa od n objekata. Jedan objekat može biti izabran više puta. Redoslijed izbora je bitan. Broj različitih izbora je:

$$P_{n,k} = n^k$$

Primjer: Izaberimo 8 objekata iz skupa $\{0,1\}$ vodeći računa o redoslijedu izbora. Imamo ukupno $P_{8,2} = 2^8$ različitih mogućnosti izbora. Uočite da se u ovom primjeru radi o osmobitnim binarnim brojevima.

Permutacije bez ponavljanja: Izbor k objekata iz skupa od n objekata. Jedan objekat može biti izabran samo jedan put. Redoslijed izbora je bitan.

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Primjer: Koliko različitih trocifrenih dekadnih brojeva možemo formirati od cifara $\{2,4,5,6,8\}$ pri čemu se jedna cifra ne smije koristiti više puta. Rješenje je:

$$P_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$$

Kombinacije bez ponavljanja: Izbor k objekata iz skupa od n objekata. Jedan objekat može biti izabran samo jedan put. Redoslijed izbora nije bitan.

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Za kombinacije bez ponavljanja koristimo specijalnu oznaku $\binom{n}{k}$ i zovemo je „binomni koeficijent” jer je poznato da je n-ti stepen binoma jednak:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Kombinacije bez ponavljanja možemo računati i po formuli:

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

gdje treba uočiti da se u imeniocu razlomka javlja tačno k činilaca.

Primjer: Na koliko načina možemo da iz skupa od 15 studenata formiramo grupu od 4 studenta. Drugačija postavka sa istim rezultatom bi bila: koliko ima četvoročlanih podskupova skupa od 15 elemenata. Rješenje:

$$C_{15,4} = \frac{15!}{4!\cdot 11!} = \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1365$$

Kombinacije sa ponavljanjem: Izbor k objekata iz skupa od n objekata. Jedan objekat može biti izabran više puta. Redoslijed izbora nije bitan.

$$C_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Primjer: na koliko se načina može 5 kuglica rasporediti u dvije kutije? Rješenje:

$$C_{2,5} = \frac{(2+5-1)!}{5!(2-1)!} = \frac{6!}{5!\cdot 1!} = 6$$

Primjer: na koliko se načina broj 20 može napisati u obliku zbira četiri prirodna broja (uključujući i nulu)? Rješenje:

$$C_{4,20} = \frac{(4+20-1)!}{20!(4-1)!} = \frac{23!}{20!\cdot 3!} = \frac{23\cdot 22\cdot 21}{3\cdot 2} = 1771$$

Koliko je načina da broj 20 napišemo u obliku zbira četiri sabirka pri čemu sabirci mogu biti prirodni brojevi različiti od nule? Rješenje:

četiri sabirka možemo predstaviti kao četiri kutije a rezultat 20 kao 20 kuglica koje treba rasporediti u kutije. Kako svaki sabirak mora biti veći od nule, znamo da u svakoj od kutija treba biti po jedna kuglica. Stavimo u svaku kutiju po jednu kuglicu. Preostaje nam $20-4=16$ kuglica koje trebamo rasporediti u četiri kutije. Broj različitih rasporeda je:

$$C_{4,16} = \frac{(4+16-1)!}{16!(4-1)!} = \frac{19!}{16!3!} = \frac{19\cdot 18\cdot 17}{3\cdot 2} = 969$$

6.2 Definicije i osnovni zakoni vjerovatnoće

Prostor vjerovatnoće: skup svih mogućih ishoda u posmatranom problemu.

$$\Omega = \{\omega | \omega \text{ je mogući ishod posmatranog problema}\}$$

Svakom ishodu ω se pridružuje nenegativan realan broj $P(\omega)$ tako da vrijedi:

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$$

Jedinica predstavlja siguran događaj (događaj koji se uvijek dešava). Ako je za neko ω vjerovatnoća $P(\omega)=0$, tada taj ishod nazivamo nemogućim. Lako se da zaključiti da vrijedi:

$$0 \leq P(\omega) \leq 1$$

za svako $\omega \in \Omega$. Skup vrijednosti $P(\omega)$ nazivamo distribucijom vjerovatnoća jer određuje način na koji se vjerovatnoća sigurnog događaja (1) raspoređuje na pojedinačne moguće ishode ω.

Vrijednosti $P(\omega)$ se mogu dobiti na dva suštinski različita načina:

1. Mogu biti unaprijed definisane, kada govorimo o vjerovatnoći „a-priori”. Primjer: bacanje novčića ima dva moguća ishoda $\Omega = \{pismo, glava\}$ i u slučaju savršenog novčića možemo pretpostaviti da se oba ishoda javljaju sa istim vjerovatnoćama, odnosno da je $P(pismo) = 0,5$ i $P(glava) = 0,5$.

2. Mogu se odrediti eksperimentalno ponavljajući mnogo puta postupak i evidentirajući pojavu mogućih ishoda. Tada govorimo o „a-posteriori” vjerovatnoći. Primjer: možemo bacati novčić 10000 puta i bilježiti koliko smo puta dobili „glavu” a koliko puta „pismo”. Neka se „glava” pojavila 5025 puta a pismo 4975 puta. Tada možemo procijeniti vjerovatnoće

$$P(glava) \approx \frac{5025}{10000} = 0,5025$$
$$P(pismo) \approx \frac{4975}{10000} = 0,4975$$

   Ove rezultate ne smijemo uzimati kao konačne. Ponavljanjem istog eksperimenta gotovo sigurno ne bismo dobili iste rezultate. Očigledno, što je broj ponavljanja veći, tačnija je i naša procjena vjerovatnoće.

Podskup A prostora vjerovatnoća Ω nazivamo događajem. Same elemente skupa Ω nazivamo elementarnim događajima. Vjerovatnoća događaja A je jednaka zbiru vjerovatnoća elementarnih događaja koji čine događaj A.

Posmatrajmo sada dva prostora vjerovatnoća Ω_1 i Ω_2. Možemo definisati novi prostor vjerovatnoća tako što posmatramo kombinaciju ova dva prostora. Tada je $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Ukoliko ishodi iz Ω_1 ni na koji način ne utiču na ishod iz Ω_2 tada se može definisati vjerovatnoća elementarnog ishoda $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ kao:

$$P(\omega) = P(\omega_1)P(\omega_2)$$

Ukoliko za dva događaja A i B vrijedi da je vjerovatnoća složenog događaja AB jednaka:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

kažemo da su događaji međusobno nezavisni.

Uslovna vjerovatnoća:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

je vjerovatnoća događaja A pod uslovom da se desio događaj B.

Dalje imamo:

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

Primjer 1 *U kutiji je 10 crnih i 8 bijelih kuglica. Iz kutije izvlačimo dvije kuglice. Kolika je vjerovatnoća da je su obje kuglice crne boje?*

Neka je A događaj da je u prvom izvlačenju izvučena crna kuglica i neka je B događaj da je u drugom izvlačenju izvučena crna kuglica. Tada vjerovatnoću ova dva događaja možemo računati kao:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{10}{18}\frac{9}{17} = \frac{10}{34} \approx 0.294\,12$$

Totalna vjerovatnoća: Neka se događaj B može desiti zajedno sa jednim, i samo jednim događajem $A_1, A_2, \ldots, A_N$ i neka su događaji $A_1, A_2, \ldots, A_N$ međusobno isključivi. Tada je

$$P(B) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)P(B|A_n)$$

navedena formula se naziva formulom totalne vjerovatnoće.

Primjer 2 *Imamo tri kutije sa kuglicama. U prvoj je 5 bijelih i 3 crne, u drugoj 2 bijele i 10 crnih i u trećoj 12 bijelih i 12 crnih kuglica. Slučajno biramo kutiju (sa istom vjerovatnoćom odabira svake kutije) pa nakon toga izvlačimo kuglicu. Koja je vjerovatnoća da je izvučena kuglica bijela? Ako je izvučena bijela kuglica koja je vjerovatnoća da je izvučena iz prve kutije?*

Označimo sa A_1 događaj da je odabrana prva kutija, sa A_2 događaj da je odabrana druga kutija i sa A_3 događaj da je odabrana treća kutija. Neka je B događaj da je izvučena bijela kuglica. Primjenom formule totalne vjerovatnoće vjerovatnoću događaja B možemo napisati u obliku:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

Vjerovatnoće događaja A_1, A_2, i A_3 su jednake i iznose:

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Uslovne vjerovatnoće su:

$$\begin{aligned}
P(B|A_1) &= \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8} \\
P(B|A_2) &= \frac{2}{2+10} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \\
P(B|A_3) &= \frac{12}{12+12} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Sada je konačno:

$$P(B) = \frac{1}{3}\frac{5}{8} + \frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{31}{72} \approx 0,43$$

U drugom dijelu primjera traži se vjerovatnoća da je kuglica izvučena iz prve kutije pod uslovom da je kuglica bijele boje. To je vjerovatnoća događaja A_1 pod uslovom da se desio događaj B:

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(A_1 \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{31}{72}} = \frac{15}{31} \approx 0,484 \end{aligned}$$

6.3 Generisanje slučajnih brojeva

Istorijski najstariji metod za generisanje slučajnih brojeva je metod srednjih cifrara kvadrata broja. Pođimo od broja sa n cifara. Kvadrirajmo ga i iz rezultata uzmimo srednjih n cifara. Uočite da se kvadriranjem broja od n cifara mogu dobiti brojevi sa $2n-1$ ili $2n$ cifara. Ukoliko je potrebno pisaćemo jednu vodeću nulu, tako da rezultat kvadriranja uvijek bude broj sa $2n$ cifara. Postupak ponavljamo i dobijamo sekvencu slučajnih brojeva. Mogući problemi: određivanje početnog broja, nije sigurno da će se svi brojevi od n cifara javljati sa istim vjerovatnoćama.

Posmatrajmo primjer gdje je $n = 2$ i krenimo od broja 42. Označavajući srednje cifre broja x sa $SC(x)$ imamo da je:

$$\begin{aligned} x_0 &= 42 \\ x_1 &= SC(x_0^2) = SC(42^2) = SC(1764) = 76 \\ x_2 &= SC(x_1^2) = SC(76^2) = SC(5776) = 77 \\ x_3 &= SC(x_2^2) = SC(77^2) = SC(5929) = 92 \\ x_4 &= SC(x_3^2) = SC(92^2) = SC(8464) = 46 \\ &\vdots \end{aligned}$$

U navedenom primjeru dobija se niz brojeva 42, 76, 77, 92, 46, 11, 12, 14, 19, 36, 29, 84, 5, 2, 0 i uočite da su svi članovi od petnaestog na dalje jednaki nuli. Za velike vrijednosti n ovakav problem se rjeđe javlja.

Drugi način za generisanje „slučajnih" brojeva je linearni kongruentni generator. Kod njega zadajemo početnu vrijednost X_0 i na osnovu nje računamo naredne vrijednosti po formuli:

$$X_{n+1} = aX_n + b \pmod m$$

gdje $\bmod m$ označava ostatak pri dijeljenju izraza sa m.

Period ponavljanja je manji ili jednak od m. Ukoliko su b i m uzajamno prosti brojevi, i $a-1$ djeljivo sa svim prostim faktorima broja m, i ako je $a-1$ djeljivo sa 4 ukoliko je m djeljivo sa 4, tada je period ponavljanja slučajne sekvence jednak m bez obzira na početnu vrijednost X_0.

Posmatrajmo primjer $m = 45$. Veličina $a-1$ treba biti djeljiva sa svim prostim faktorima broja m a to su brojevi 5 i 3, tako da je najmanje $a-1 = 5\cdot 3 = 15$ odakle je $a = 16$. Broj b treba biti uzajamno prost sa brojem m, uzmimo da je $b = 17$. Neka je početno $X_0 = 0$. Dobijamo:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 16X_0 + 17 \pmod{45} = 17 \pmod{45} = 17\\
X_2 &= 16X_1 + 17 \pmod{45} = 289 \pmod{45} = 19\\
X_3 &= 16X_2 + 17 \pmod{45} = 321 \pmod{45} = 6\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Ponovimo li navedeni postupak više puta dolazimo do niza:

$$
\begin{aligned}
&0,17,19,6,23,25,12,29,31,18,35,37,24,41,43,30,2,4,36,8,10,42,\\
&14,16,3,20,22,9,26,28,15,32,34,21,38,40,27,44,1,33,5,7,39,11,13,\\
&0,17,19,6,23,25,12,\ldots
\end{aligned}
$$

gdje uočavamo da se nakon $m = 45$ vrijednosti niz ponavlja.

Napomenimo da postoje i drugi generatori slučajnih brojeva sa komplikovanijim algoritmima i većim stepenom „slučajnosti". Primjer takvog generatora je Mersenov generator (Mersenne Twister).

6.4 Slučajne varijable

Slučajna varijabla S je funkcija definisana na prostoru vjerovatnoća Ω. Raspodjela vjerovatnoće slučajne varijable predstavlja vjerovatnoću pojavljivanja svakog mogućeg rezultata $P(S = x)$. U slučajevima kada je skup Ω beskonačan češće se zadaje vjerovatnoća $P(S \leq x)$.

Očekivana vrijednost slučajne varijable S obilježava se sa $E(S)$ i računa se po formuli:

$$E(S) = \sum_x xP(S = x)$$

gdje je sumiranje provedeno po svim mogućim vrijednostima x slučajne varijable S.

Matematičko očekivanje ima sledeće osobine:

- Matematičko očekivanje konstante jednako je konstanti:

$$E(c) = c$$

- Matematičko očekivanje slučajne varijable pomnožene sa nekom konstantom jednako je proizvodu te konstante i matematičkog očekivanja posmatrane slučajne varijable:

$$E(c \cdot S) = c \cdot E(S)$$

- Matematičko očekivanje zbira dvije slučajne varijable definisane nad istim prostorom vjerovatnoća jednako je zbiru matematičkih očekivanja posmatranih varijabli:

$$E(S_1 + S_2) = E(S_1) + E(S_2)$$

Varijansa slučajne varijable S označava se sa $V(S)$ i računa se kao matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne varijable od njene očekivane vrijednosti:

$$\begin{aligned} V(S) &= E((S - E(S))^2) = \\ &= E(S^2 - 2SE(S) + E(S)^2) = \\ &= E(S^2) - 2E(S)^2 + E(S)^2 = E(S^2) - E(S)^2 \end{aligned}$$

Varijansa ima sledeće osobine:

$$V(S + c) = V(S)$$
$$V(c \cdot S) = c^2 V(S)$$

gdje je c proizvoljna konstanta.

Ako su S_1 i S_2 dvije nezavisne slučajne varijable tada je:

$$V(S_1 + S_2) = V(S_1) + V(S_2)$$
$$V(S_1 - S_2) = V(S_1) + V(S_2)$$

Standardna devijacija $\sigma(S)$ je kvardatni korijen varijanse.

$$\sigma(S) = \sqrt{V(S)}$$

6.5 Distribucije vjerovatnoća

Slučajna varijabla sa uniformnom distribucijom. Imamo N mogućih vrijednosti slučajne varijable i svaka se pojavljuje sa istom vjerovatnoćom, dakle

$$P(S = x) = \frac{1}{N}$$

Primjer slučajne varijable sa uniformnom distribucijom vjerovatnoća je bacanje kockice gdje je $N = 6$ i $P(S = x) = \frac{1}{6}$.

Neka su moguće vrijednosti slučajne varijable s prirodni brojevi od 1 do N. Tada će prosječna vrijednost biti:

$$E(s) = \sum_{k=1}^{N} kP(s=k) = \sum_{k=1}^{N} k\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k = $$
$$= \frac{1}{N}\frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

Slučajna varijabla koja uzima vrijednosti od 0 do N ima binomnu raspodjelu ukoliko je:

$$P(S=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

gdje je $0 \le p \le 1$ i $0 \le q \le 1$ i $p+q=1$. Primjer ovakve slučajne varijable je bacanje novčića N puta i utvrđivanje koliko se puta pojavilo „pismo".

Slučajna varijabla sa geometrijskom (Paskalovom) distribucijom vjerovatnoća. Neka je $0 \le p \le 1$. Tada je

$$P(S=k) = (1-p)^{k-1}p$$

Primjer ovakve slučajne varijable je bacanje novčića sve dok se ne dobije „pismo". Broj bacanja je posmatrana slučajna varijabla, a p je vjerovatnoća dobijanja „pisma".

6.6 Generatorske funkcije i diskretne slučajne varijable

Neka je S diskretna slučajna varijabla koja uzima vrijednosti iz skupa prirodnih (ili cijelih) brojeva sa zadatom distribucijom vjerovatnoća $P(S=n)$. Distribucija vjerovatnoća predstavlja niz brojeva P_n i kao takva ima generatorsku funkciju:

$$G(z) = \sum_n P_n z^n = \sum_n P(S=n)z^n$$

Navedimo i dokažimo neke od osobina generatorskih funkcija slučajnih varijabli. U proizvoljnom slučaju vrijedi:

$$G(1) = 1$$

dokaz je trivijalan:

$$G(z) = \sum_n P(S=n)z^n$$
$$G(1) = \sum_n P(S=n)1^n = \sum_n P(S=n) = 1$$

Posmatrajmo sada prvi izvod generatorske funkcije i dokažimo da se pomoću njega može doći do matematičkog očekivanja posmatrane slučajne varijable:

$$G'(1) = E(S)$$

Napišimo izvor funkcije $G(z)$

$$\begin{aligned} G'(z) &= \frac{d}{dz}\sum_n P_n z^n = \sum_n P_n \frac{d}{dz} z^n = \\ &= \sum_n P_n n z^{n-1} \end{aligned}$$

sada je:

$$G'(1) = \sum_n P_n n \cdot 1^{n-1} = \sum_n n \cdot P_n = E(S)$$

Do izraza za varijansu slučajne varijable možemo doći posmatrajući drugi izvod generatorske funkcije:

$$\begin{aligned} G''(z) &= \frac{d}{dz} G'(z) = \frac{d}{dz}\sum_n P_n n z^{n-1} = \\ &= \sum_n P_n n \frac{d}{dz} z^{n-1} = \sum_n P_n n(n-1) z^{n-2} = \\ &= \sum_n P_n (n^2 - n) z^{n-2} = \sum_n P_n n^2 z^{n-2} - \sum_n P_n n z^{n-2} \end{aligned}$$

stavljajući $z = 1$ dobijamo:

$$\begin{aligned} G''(1) &= \sum_n P_n n^2 1^{n-2} - \sum_n P_n n 1^{n-2} = \\ &= \sum_n n^2 P_n - \sum_n n P_n = E(S^2) - E(S) \end{aligned}$$

odavde je

$$E(S^2) = G''(1) + E(S) = G''(1) + G'(1)$$

Znamo da je

$$V(S) = E(S^2) - (E(S))^2$$

odakle dobijamo

$$V(S) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$$

Pokažimo da za dvije nezavisne slučajne varijable x i y vrijedi:

$$G_{x+y}(z) = G_x(z) G_y(z)$$

Po definiciji je:

$$G_{x+y}(z) = \sum_n P(x + y = n) z^n$$

Odredimo vjerovatnoću $P(x+y=n)$ da zbir dvije nezavisne slučajne varijable bude jednak n. Ako slučajna varijabla x uzme vrijednost k tada slučajna varijabla y mora uzeti vrijednost $n-k$. Ovaj događaj se dešava sa vjerovatnoćom $P(x=k \text{ i } y=n-k)$. Radi se, dakle, o proizvodu dva nezavisna događaja pa je vjerovatnoća jednaka proizvodu odgovarajućih vjerovatnoća:

$$P(x=k \text{ i } y=n-k)=P(x=k)\cdot P(y=n-k)$$

Vjerovatnoću da zbir $x+y$ bude jenak n dobićemo sabiranjem vjerovatnoća elementarnih (međusobno isključivih) događaja:

$$P(x+y=n)=\sum_k P(x=k)\cdot P(y=n-k)$$

Uvrstimo dobijeni izraz u definiciju $G_{x+y}(z)$. Dobijamo:

$$G_{x+y}(z)=\sum_n \sum_k P(x=k)\cdot P(y=n-k)z^n$$

i uvedimo smjenu $n-k=m$ kojom ćemo eleiminisati varijablu n i umjesto nje uvesti novu varijablu m. Dobijamo:

$$\begin{aligned} G_{x+y}(z) &= \sum_m \sum_k P(x=k)\cdot P(y=m)z^{k+m} = \\ &= \sum_m \sum_k P(x=k)z^k \cdot P(y=m)z^m = \\ &= \sum_k P(x=k)z^k \cdot \sum_m P(y=m)z^m = \\ &= G_x(z)\cdot G_y(z) \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Primjer 3 *Posmatra se slučajna varijabla S koja podliježe binomnoj raspodjeli vjerovatnoća sa $n=100$, $p=0{,}2$ i $q=1-p=0{,}8$. Pronaći generatorsku funkciju $G(z)$ slučajne varijable S, njeno matematičko očekivanje, varijansu i standardnu devijaciju.*

Binomna raspodjela vjerovatnoća govori nam da je

$$P(S=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\binom{100}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{100-k}$$

Generatorska funkcija je:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_k P(S=k)z^k = \\
&= \sum_k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} z^k = \\
&= \sum_k \binom{n}{k} (pz)^k q^{n-k} = \\
&= (pz+q)^n
\end{aligned}$$

gdje je iskorištena binomna teorema:

$$(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Provjerimo da li vrijedi $G(1)=1$. Imamo:

$$G(1) = (p+q)^n = 1^n = 1$$

Sada je:

$$\begin{aligned}
G'(z) &= np(pz+q)^{n-1} \\
G''(z) &= n(n-1)p^2(pz+q)^{n-2}
\end{aligned}$$

Za $z=1$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
G'(1) &= np(p+q)^{n-1} = np\cdot 1^{n-1} = n\cdot p \\
G''(1) &= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2\cdot 1^{n-2} = (n^2-n)p^2
\end{aligned}$$

odakle dolazimo do:

$$\begin{aligned}
E(S) &= G'(1) = n\cdot p = 100\cdot 0,2 = 20 \\
V(S) &= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = \\
&= (n^2-n)p^2 + np - (np)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = \\
&= np - np^2 = np(1-p) = n\cdot p\cdot q = 100\cdot 0,2\cdot 0,8 = 16 \\
\sigma(S) &= \sqrt{V(S)} = \sqrt{npq} = \sqrt{16} = 4
\end{aligned}$$

Uočite da standardna devijacija opisuje „rasipanje” slučajne varijable oko njene srednje vrijednosti. Možemo tvrditi da će (sa određenom vjerovatnoćom) slučajna varijabla uzeti vrijednost u granicama od $E(S)-\sigma(S)$ do $E(S)+\sigma(S)$, odnosno u analiziranom primjeru od 16 do 24.

Primjer 4 *Eksperiment daje pozitivan ishod da vjerovatnoćom od* $0,01$. *Eksperiment se ponavlja sve dok ishod ne bude pozitivan. Broj ponavljanja eksperimenta je slučajna varijabla* S. *Odrediti matematičko očekivanje, varijansu i standardnu devijaciju slučajne varijable* S.

Navedena slučajna varijabla podliježe geometrijskoj raspodjeli vjerovatnoća sa $p = 0,01$ kada je

$$P(S = k) = (1-p)^{k-1}p$$

do izraza za vjerovatnoću mogli smo doći i na drugačiji način. Naime, slučajna varijabla S uzima vrijednost k ako je eksperiment $k-1$ put dao negativan ishod a u narednom pokušaju se pojavio pozitivan ishod. Vjerovatnoća da dobijemo negativan ishod je $1-p$ a da se to desi $k-1$ put $(1-p)^{k-1}$, tako da dolazimo do navedene formule za vjerovatnoću $P(S = k)$.

Pronađimo generatorsku funkciju:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sum_k P(S=k)z^k = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}pz^k = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}pzz^{k-1} = pz\sum_{k=1}^{\infty}(z-pz)^{k-1} = \\
&= pz\sum_{k=0}^{\infty}(z-pz)^k = pz\frac{1}{1-z+pz} = \frac{pz}{1-(1-p)z}
\end{aligned}$$

Provjerimo da li vrijedi $G(1) = 1$:

$$G(1) = \frac{p}{1-(1-p)1} = \frac{p}{1-1+p} = \frac{p}{p} = 1$$

Sada nađimo prvi i drugi izvod funkcije $G(z)$:

$$\begin{aligned}
G'(z) &= \frac{p(1-(1-p)z)+pz(1-p)}{(1-(1-p)z)^2} = \frac{p-pz+p^2z+pz-p^2z}{(1-(1-p)z)^2} = \\
&= \frac{p}{(1-(1-p)z)^2} \\
G''(z) &= \frac{p\cdot 2(1-p)(1-(1-p)z)}{(1-(1-p)z)^4} = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)z)^3}
\end{aligned}$$

i njihove vrijednosti za $z = 1$:

$$\begin{aligned}
G'(1) &= \frac{p}{(1-1+p)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \\
G''(1) &= \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p))^3} = \frac{2p(1-p)}{p^3} = 2\frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

Sada je:

$$E(S) = G'(1) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,01} = 100$$

što znači da je očekivani broj ponavljanja eksperimenta 100. Varijansa je jednaka:

$$\begin{aligned}
V(S) &= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = \\
&= 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \\
&= \frac{1-0,01}{0,01^2} = 9900
\end{aligned}$$

i konačno, standardna devijacija:

$$\sigma(S) = \sqrt{V(S)} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \approx 99,5$$

Kako standardna devijacija govori o „rasipanju" slučajne varijable oko očekivane vrijednosti to u ovom slučaju zaključujemo da je rasipanje dosta veliko.

6.7 Ponovljeni eksperimenti

Neka se kao ishod eksperimenta mogu javiti brojevi iz skupa S. ponovimo li eksperiment N puta, smatrajući da je svaki eksperiment nezavisan od ostalih dobićemo uzorak, odnosno skup $s_1, s_2, \ldots, s_N$ od N ishoda eksperimenta.

Prosječna vrijednost uzorka može se odrediti kao aritmetička sredina dobijenih vrijednosti slučajne varijable:

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_N}{N}$$

Dobijena vrijednost $\bar{s}$ je takođe slučajna varijabla. Očekivanje ove slučajne varijable je:

$$E(\bar{s}) = E\left(\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_N}{N}\right) = \frac{E(s_1) + E(s_2) + \cdots + E(s_N)}{N} = E(s)$$

Varijansa će biti:

$$V(\bar{s}) = E(\bar{s}^2) - (E(\bar{s}))^2$$

Odredimo $E(\bar{s}^2)$:

$$\begin{aligned} E(\bar{s}^2) &= E\left(\frac{(s_1+s_2+\cdots+s_N)^2}{N^2}\right) = \\ &= \frac{1}{N^2}E(s_1s_1+s_1s_2+\ldots s_Ns_N) = \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}E(s_ns_k) \end{aligned}$$

posmatrajmo sada slučajeve kada je u prethodnim sumama $n=k$. Takvih sabiraka ima N i tada je:

$$E(s_ns_n) = E(s_n^2) = E(s^2)$$

U preostalim slučajevima je $n \neq k$, takvih slučajeva ima $N^2 - N = N(N-1)$ i odgovarajuće očekivanje je:

$$E(s_ns_k) = E(s_n)E(s_k) = E(s)^2$$

sada je:

$$\begin{aligned} E(\bar{s}^2) &= \frac{1}{N^2}(N\cdot E(s^2) + N(N-1)\cdot E(s)^2) = \\ &= \frac{E(s^2)}{N} + E(s)^2 - \frac{E(s)^2}{N} \end{aligned}$$

pa je

$$V(\bar{s}) = \frac{E(s^2)}{N} + E(s)^2 - \frac{E(s)^2}{N} - E(s)^2 = \frac{V(s)}{N}$$

Primjer 5 *Eksperiment sa bacanjem kockice ponovljen je 5 puta. Odrediti očekivanu vrijednost prosjeka i njenu varijansu.*

Ishod našeg eksperimenta je cijeli broj od 1 do 6, pri čemu se svaki ishod javlja sa jednakom vjerovatnoćom od $\frac{1}{6}$. Možemo izračunati očekivanu vrijednost:

$$E(S) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$$

i varijansu:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6} + 4^2\cdot\frac{1}{6} + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{91}{6} \\ V(S) &= E(S^2) - (E(S))^2 = \frac{91}{6} - \frac{7^2}{2^2} = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

Ako estimiramo očekivanu vrijednost na osnovu šest bacanja dobićemo procjenu:

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5}{5}$$

Pokazali smo da je

$$E(\bar{s}) = E(S) = \frac{7}{2} = 3,5$$

i da je:

$$V(\bar{s}) = \frac{V(S)}{N} = \frac{V(S)}{5} = \frac{35}{5 \cdot 12} = \frac{7}{12} \approx 0,583$$

odnosno

$$\sigma(\bar{s}) = \sqrt{V(\bar{s})} \approx 0,764$$

Ponovljenim eksperimentima možemo procjenjivati i varijansu slučajne varijable:

$$\bar{v} = \frac{s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_N^2}{N-1} - \frac{(s_1 + s_2 + \cdots + s_N)^2}{N(N-1)}$$

pokažimo da je u ovom slučaju očekivana vrijednost varijable $\bar{v}$ jednaka varijansi varijable s.

$$\begin{aligned}
E(\bar{v}) &= \frac{1}{N-1} E\left(\sum_{k=1}^{N} s_k^2 - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} s_k s_n\right) = \\
&= \frac{1}{N-1}\left(\sum_{k=1}^{N} E(s_k^2) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{n,k=1\\ n=k}}^{N} E(s_k s_n) - \frac{1}{N}\sum_{\substack{n,k=1\\ n\neq k}}^{N} E(s_k s_n)\right) = \\
&= \frac{1}{N-1}\left(NE(s^2) - \frac{1}{N} NE(s^2) - \frac{1}{N} N(N-1)E(s)^2\right) = \\
&= \frac{1}{N-1}\left((N-1)E(s^2) - (N-1)E(s)^2\right) = E(s^2) - E(s)^2 = V(s)
\end{aligned}$$

7 Analiza računarskih algoritama

Formiranje uređene liste of N podataka

Ukratko o listama: Lista je struktura podataka često korišćena u računarskim programima. Podaci se zapisuju zajedno sa vezom prema narednom elementu liste. Početni element liste je osnovni element za pristup čitavoj listi. Lista je uređena ukoliko postoji binarna relacija $\leq$ definisana nad elementima liste tako da za svaka dva susjedna elementa liste x_i i x_{i+1} vrijedi $x_i \leq x_{i+1}$.

Posmatrajmo problem smještanja ulaznih podataka u uređenu listu. Algoritam kojim možemo riješiti problem je:

1. Uzmimo prvi element sa ulaza i formirajmo listu od jednog elementa. Ovakva lista je očigledno uređena lista.

2. Uzmimo naredni element sa ulaza, obilježimo ga sa y.

3. Krenimo od prvog elementa liste. Obilježimo ga sa x.

4. Provjerimo da li je $x \leq y$. Ako jeste pređimo na naredni element liste (ukoliko on postoji) i vratimo se na korak 4. Ako nije $x \leq y$ tada smo pronašli mjesto gdje element y treba umetnuti u listu.

5. Umetnimo element y u listu.

6. Ukoliko nijesmo obradili sve ulazne podatke vratimo se na korak 2.

Analizirajmo broj operacija poređenja. Posmatrajmo dva ekstermna slučaja:

- Ulazni podaci su zadati u opadajućem redoslijedu (od najvećeg prema najmanjem). U ovom slučaju, korak 4. se izvršava samo jedan put za svaki ulazni element (od drugog do poslednjeg). Broj operacija poređenja je $N-1$.

- Ulazni podaci su zadati u rastućem redoslijedu. Svaki element sa ulaza treba smjestiti na kraj liste, tako da se korak 4 izvršava više puta. Za k-ti ulazni element korak 4 se izvršava $k-1$ puta, tako da je ukupan broj operacija poređenja jednak:

$$1+2+\cdots+(N-1)=\sum_{k=2}^{N}(k-1)=\frac{N(N-1)}{2}=\frac{N}{2}(N-1)$$

Posmatrajući prethodno navedene slučajeve zaključujemo da se broj operacija poređenja kreće u rasponu od $N-1$ do $\frac{1}{2}N(N-1)$. Posmatrajmo broj operacija poređenja kao slučajnu varijablu S_N. Smatraćemo da su ulazni podaci zadati u slučajnom rasporedu tako da se u koraku 4 sa jednakom vjerovatnoćom može desiti da se element y umetne na bilo kojoj poziciji u listi.

Potražimo raspodjelu vjerovatnoća slučajnih varijabli S_N:

1. Za $N = 1$ broj operacija poređenja je jednak nuli kakav god je ulazni podatak pa imamo raspodjelu vjerovatnoća

x	0
$p(S_1 = x)$	1

2. Za $N = 2$ broj operacija poređenja je uvijek jednak 1 tako da je raspodjela vjerovatnoća

x	1
$p(S_2 = x)$	1

3. Za $N = 3$ pri umetanju trećeg elementa imamo tri mogućnosti: Element je manji od prvog elementa liste. To zaključujemo sa samo jednim poređenjem; Element je veći od prvog a manji od drugog elementa liste. U ovom slučaju trebamo obaviti dva poređenja; Element je veći od drugog elementa liste. I za ovaj slučaj su dva poređenja dovoljna. Usvojili smo pretpostavku da je jednaka vjerovatnoća umetanja novog elementa na bilo koju poziciju u listi. Dobijamo da je raspodjela vjerovatnoća slučajne varijable S_3:

x	2	3
$p(S_3 = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

4. Za $N = 4$ trebamo pronaći vjerovatnoće $P(S_4 = x)$. Broj poređenja u četvrtom koraku može biti $1,2,\ldots,(4-1)$ pri čemu u svakom slučaju, osim poslednjeg, imamo samo jednu mogućnost za umetanje elementa y. U poslednjem slučaju element se može dodati prije ili poslije zadnjeg elementa liste. Posmatrajmo broj poređenja u umetanju četvrtog elementa kao slučajnu varijablu R_4. Njena raspodjela vjerovatnoća je:

x	1	2	3
$p(R_4 = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

   Ukupan broj poređenja u ovom slučaju je jednak zbiru broja poređenja u slučaju $N = 3$ i slučajne varijable R_4. Dakle, imamo:

$$S_4 = S_3 + R_4$$

Sada je:

$$P(S_4 = x) = \sum_k P(S_3 = k)P(R_4 = x - k)$$

odnosno:

$$P(S_4 = 3) = P(S_3 = 2)P(R_4 = 1) = \frac{1}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$
$$P(S_4 = 4) = P(S_3 = 2)P(R_4 = 2) + P(S_3 = 3)P(R_4 = 1) =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12}$$
$$P(S_4 = 5) = P(S_3 = 2)P(R_4 = 3) + P(S_3 = 3)P(R_4 = 2) =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{2}{4} + \frac{2}{3}\frac{1}{4} = \frac{4}{12}$$
$$P(S_4 = 6) = P(S_3 = 3)P(R_4 = 3) = \frac{2}{3}\frac{2}{4} = \frac{4}{12}$$

tako da je raspodjela vjerovatnoća slučajne varijable S_4 data sa:

x	3	4	5	6
$p(S_4 = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$

5. Proceduru možemo nastaviti dalje, međutim, dosta je teško pronaći zakonitost koja vezuje vjerovatnoće u raspodjelama sa rednim brojem slučajne varijable i sa brojem poređenja.

Analizirajmo sada šta se dešava ako imamo listu sa $N-1$ članova i u nju dodajemo član N. Slučajna varijabla S_N jednaka je zbiru dvije slučajne varijable:

$$S_N = S_{N-1} + R_N$$

Generatorska funkcija varijable S_N će biti:

$$G_{S_N} = G_{S_{N-1}} \cdot G_{R_N}$$

Slučajna varijabla R_N ima jednostavnu distribuciju vjerovatnoća:

x	1	2	3	...	$N-2$	$N-1$
$p(R_N = x)$	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	...	$\frac{1}{N}$	$\frac{2}{N}$

i generatorsku funkciju:

$$
\begin{aligned}
G_{R_N} &= \frac{1}{N}z + \frac{1}{N}z^2 + \cdots + \frac{1}{N}z^{N-2} + \frac{2}{N}z^{N-1} = \\
&= \frac{1}{N}(z + z^2 + \cdots + z^{N-1}) + \frac{1}{N}z^{N-1} = \\
&= \frac{1}{N}(z + z^2 + \cdots + z^{N-1} + z^{N-1}) = \\
&= \frac{1}{N}\frac{z(1-z^{N-1})}{1-z} + \frac{1}{N}z^{N-1} = \frac{1}{N}\frac{z - z^N + z^{N-1} - z^N}{1-z} = \\
&= \frac{1}{N}\frac{z + z^{N-1} - 2z^N}{1-z}
\end{aligned}
$$

pri čemu treba imati na umu da izvođenje vrijedi od $N = 2$ pa na dalje (pogledajte raspodjelu varijable R_2). Imamo dakle rekurzivnu relaciju:

$$
\begin{aligned}
G_{S_N} &= G_{S_{N-1}}\frac{1}{N}\frac{z + z^{N-1} - 2z^N}{1-z} = \\
&= \frac{1}{N}G_{S_{N-1}}(z + z^2 + \cdots + z^{N-1} + z^{N-1})
\end{aligned}
$$

uz

$$G_{S_1} = 1$$

Provjerimo da li se dobijenom formulom mogu dobiti G_{S_2}, G_{S_3} i G_{S_4}:

$$
\begin{aligned}
G_{S_2} &= \frac{1}{2}G_{S_1}(z + z) = \frac{2z}{2} = z \\
G_{S_3} &= \frac{1}{3}G_{S_2}(z + z^2 + z^2) = \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{3}z^3 \\
G_{S_4} &= \frac{1}{4}G_{S_3}(z + z^2 + z^3 + z^3) = \\
&= \frac{1}{12}(z^2 + 2z^3)(z + z^2 + 2z^3) = \\
&= \frac{1}{12}(z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 4z^6)
\end{aligned}
$$

Sada se G_{S_N} može napisati u obliku:

$$
\begin{aligned}
G_{S_N} &= G_{S_1}G_{R_2}G_{R_3}G_{R_4}\cdot\ldots\cdot G_{R_N} = \\
&= G_{R_2}G_{R_3}G_{R_4}\cdot\ldots\cdot G_{R_N}
\end{aligned}
$$

Očekivana vrijednost varijable S_N dobija se kao $G'_{S_N}(1)$, odnosno:

$$
\begin{aligned}
G'_{S_N}(z) = {} & G'_{R_2}G_{R_3}G_{R_4}\cdot\ldots\cdot G_{R_N} + G_{R_2}G'_{R_3}G_{R_4}\cdot\ldots\cdot G_{R_N} + \\
& + \cdots + G_{R_2}G_{R_3}G_{R_4}\cdot\ldots\cdot G'_{R_N}
\end{aligned}
$$

Stavljanjem $z = 1$ i uz vođenje računa da je $G_{R_k}(1) = 1$ dobijamo:

$$G'_{S_N}(1) = G'_{R_2}(1) + G'_{R_3}(1) + \cdots + G'_{R_N}(1) = \\ = \sum_{k=2}^{N} G'_{R_k}(1)$$

kako je dalje:

$$G'_{R_k}(z) = \frac{1}{k}(1 + 2z + \cdots + (k-1)z^{k-2}) + \frac{1}{k}(k-1)z^{k-2}$$

$$G'_{R_k}(1) = \frac{1}{k}(1 + 2 + \cdots + (k-1)) + \frac{1}{k}(k-1) = \\ = \frac{1}{k}\frac{(k-1)k}{2} + \frac{(k-1)}{k} = \frac{(k-1)(k+2)}{2k} = \frac{k^2+k-2}{2k} = \\ = \frac{k}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$$

Sada je:

$$E(S_N) = G'_{S_N}(1) = \sum_{k=2}^{N} G'_{R_k}(1) = \\ = \sum_{k=2}^{N}(\frac{k}{2} - \frac{1}{2k}) = \sum_{k=1}^{N}(\frac{k}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1}) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} 1 - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}\frac{N(N+1)}{2} + \frac{N}{2} - H_N = \\ = \frac{N(N+3)}{4} - H_N$$

: $\frac{1}{2}N + \frac{1}{4}N(N+1) = \frac{3}{4}N + \frac{1}{4}N^2$gdje je sa H_N označen N-ti član narmoniskog reda:

$$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

Konačno za $N = 4$ imamo da je

$$E(S_4) = \frac{4 \cdot 7}{4} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{59}{12} \approx 4,92$$

Provjerimo rezultat koristeći se prethodno dobijenom raspodjelom vjerovatnoće slučajne varijable S_4:

x	3	4	5	6
$p(S_4 = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$

odakle je

$$E(S_4) = 3 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{3}{12} + 5 \cdot \frac{4}{12} + 6 \cdot \frac{4}{12} = \frac{59}{12} \approx 4,92$$

Očekivani broj poređenja za $N = 100$ će biti:

$$E(S_{100}) = \frac{100 \cdot 103}{4} - H_{100} = 2575 - H_{100} \approx 2575 - 5,2 = 2569,8$$